

П.Є. Пустовойтов, д.т.н., проф.
В.О. Компанієць, ст. викладач

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

Марківська апроксимація трафіку мережі за рахунок моделей із прихованими станами

У статті представлено новий підхід до апроксимації мережевого трафіку з використанням моделей із прихованими станами. Однією з ключових проблем у телекомунікаційних системах є складна кореляційна структура вхідних потоків, яка ускладнює аналіз їх продуктивності. Для подолання цієї проблеми застосовується марківська апроксимація немарківського трафіку, що дозволяє відтворювати властивості реальних потоків. Основою такого підходу є моделі марківських процесів із модульованою інтенсивністю (ММРР), які описують змінність інтенсивності пакетних потоків за рахунок прихованого марківського процесу.

Модель ММРР ґрунтується на пуассонівському процесі, інтенсивність якого визначається переходами між станами марківського ланцюга. У роботі подано математичну формалізацію цієї моделі, включно з побудовою матриці переходів та визначенням параметрів інтенсивності для кожного стану. Це створює можливість гнучко керувати поведінкою трафіку в умовах змінного навантаження та відтворювати статистичні характеристики, зокрема автокореляцію.

Особлива увага приділяється питанням налаштування параметрів ММРР. Для цього застосовуються методи оцінки, що базуються на аналізі експериментальних даних. Використання рівнянь Колмогорова – Чепмена дозволяє обчислювати ймовірності перебування в різних станах та визначати середні інтенсивності потоків. Важливим аспектом є вибір кількості станів у марківському ланцюзі, оскільки саме від цього залежить точність апроксимації.

Практична значущість підходу проявляється у сфері мультимедійних і відеопотоків, де традиційні моделі не враховують змінності навантаження. Використання ММРР забезпечує адекватне відображення пікових та низькоінтенсивних режимів роботи мережі, що дає змогу оптимізувати їх функціонування. У статті наведено приклади апроксимації реальних даних, які підтверджують ефективність моделі.

Ключові слова: марківська апроксимація; інтенсивність потоку; моделювання трафіку; математичні інструменти; метод; модель; телекомунікаційна система.

Актуальність теми. Марківська апроксимація немарківського трафіку є ключовим методом аналізу та моделювання складних мережевих процесів. У сучасних телекомунікаційних системах трафік характеризується високим рівнем варіативності, автокореляцією та нестабільністю потоків даних. Традиційні моделі, засновані на незалежних випадкових процесах, не завжди дозволяють адекватно описати реальні потоки інформації, що циркулюють у комп'ютерних мережах. Саме тому виникає необхідність у застосуванні методів, які можуть коректно відтворювати стохастичні характеристики трафіку та забезпечувати більш точний аналіз продуктивності мереж.

Одним із найбільш ефективних підходів до апроксимації немарківського трафіку є марківські процеси з модульованою інтенсивністю (ММРР – Markov Modulated Poisson Process). Ця модель дозволяє враховувати змінність інтенсивності потоку даних та його кореляційні властивості, що особливо важливо для аналізу відеострумів, VoIP-телефонії та інших видів мультимедійного трафіку. Використання ММРР дає змогу адаптувати математичні моделі до реальних мережевих умов, що покращує точність прогнозування навантаження на мережу та оптимізує її використання.

Реальні телекомунікаційні системи піддаються впливу різних факторів, які призводять до нерівномірного розподілу інтенсивності передавання пакетів у часі. У таких випадках традиційні пуассонівські моделі не дають достатньо точних результатів, оскільки вони не враховують короточасну залежність між подіями. Натомість ММРР дозволяє моделювати різні рівні навантаження та їхні коливання шляхом зміни станів марківського ланцюга. Це забезпечує більш гнучке налаштування моделі під конкретні мережеві умови та покращує її здатність відображати реальний трафік.

Метод ММРР базується на використанні матричних рівнянь, які описують процес зміни станів марківського ланцюга та ймовірності перебування системи в певному стані. Ці рівняння дозволяють визначити основні характеристики трафіку, такі як середня швидкість прибуття пакетів, ймовірність виникнення періодів високого або низького навантаження та ступінь автокореляції. Коректний вибір

параметрів моделі є важливим кроком у забезпеченні її ефективності, тому в статті також розглядаються методи оцінки параметрів на основі реальних даних про трафік.

Застосування ММРР є особливо актуальним у сучасних високошвидкісних мережах, де ефективне управління ресурсами та мінімізація затримок відіграють важливу роль. Зокрема, така апроксимація використовується для аналізу роботи мобільних мереж 5G, Інтернету речей (IoT) та інтелектуальних систем управління трафіком. Оптимізація цих процесів дозволяє зменшити затримки передавання даних, збільшити пропускну здатність мережі та підвищити якість обслуговування користувачів.

Таким чином, у цій статті розглядаються основи застосування ММРР для апроксимації немарківського трафіку, описуються математичні принципи моделі, методи визначення її параметрів та практичні аспекти її використання в сучасних телекомунікаційних системах. Аналіз переваг та недоліків підходу дозволить визначити його придатність для конкретних мережевих середовищ та оцінити ефективність у контексті сучасних інформаційних технологій.

Сучасні телекомунікаційні мережі стикаються з постійно зростаючими вимогами до продуктивності, гнучкості та ефективності управління трафіком. Збільшення кількості користувачів, розвиток мультимедійного контенту, впровадження технологій 5G та IoT призводять до значного ускладнення структури потоків даних. У таких умовах використання традиційних стохастичних моделей стає недостатнім для точного аналізу та прогнозування поведінки мереж. Це зумовлює необхідність розробки та застосування нових методів апроксимації, які здатні коректно описувати реальний трафік із властивими йому залежностями та автокореляцією.

Марківські процеси з модульованою інтенсивністю (ММРР) є одним із найбільш перспективних підходів до моделювання трафіку в сучасних мережах. Їхня актуальність пояснюється здатністю адаптуватися до змінних умов навантаження, що особливо важливо для відеострумів, голосового зв'язку через IP (VoIP), хмарних сервісів і розподілених обчислень. Використання таких моделей дозволяє операторам мереж визначати оптимальні параметри обслуговування трафіку, знижувати ймовірність перевантажень і підвищувати загальну якість послуг.

Особливої актуальності цей підхід набуває в контексті розвитку 5G-мереж і майбутніх поколінь телекомунікаційних систем. Висока щільність пристроїв у мережах нового покоління, різноманітність трафіку та динамічна зміна умов передачі даних вимагають більш гнучких і точних методів аналізу. Використання ММРР дозволяє ефективно прогнозувати навантаження, визначати оптимальні стратегії розподілу ресурсів і адаптувати мережеву інфраструктуру до змінних умов експлуатації.

Актуальність дослідження також підтверджується зростанням інтересу до автоматизованих методів аналізу трафіку, враховуючи машинне навчання та алгоритми штучного інтелекту. Поєднання класичних марківських моделей із сучасними алгоритмами оптимізації відкриває нові можливості для побудови інтелектуальних систем управління трафіком, які здатні адаптивно змінювати параметри мережі в режимі реального часу.

Таким чином, розгляд методів апроксимації немарківського трафіку за допомогою ММРР є надзвичайно важливим у контексті сучасних тенденцій розвитку телекомунікаційних систем. Це дослідження дозволяє не лише покращити розуміння роботи складних мережевих процесів, але й сприяти розробці нових ефективних рішень для оптимізації їхньої продуктивності та якості обслуговування.

Аналіз останніх досліджень та публікацій, на які спираються автори. Марківська апроксимація немарківського трафіку використовується для спрощення аналізу систем із залежностями та кореляціями в часі. Це дозволяє моделювати складні процеси передачі даних у мережах, забезпечуючи більш точне прогнозування та оптимізацію їхньої роботи [1].

Одним із підходів є використання марківських моделей з фіксованим числом станів (Finite-State Markov Models, FSM). У цьому випадку немарківський трафік апроксимується дискретною марківською моделлю, де кожен стан відповідає певним характеристикам трафіку, наприклад, швидкості потоку або рівню завантаженості. Це дозволяє спростити аналіз та управління мережею, розбиваючи складні процеси на більш керовані стани [2].

Іншим підходом є використання марківських моделей з фазовим розподілом (Phase-Type Distributions, PH-type). Ці моделі застосовують комбінації експоненційних розподілів для апроксимації складних розподілів часу прибуття або тривалості пакетів. Це забезпечує гнучкість у моделюванні різних типів трафіку та дозволяє враховувати його стохастичну природу [3].

Марківські моделі другого порядку (ММРР – Markov Modulated Poisson Process) характеризуються тим, що інтенсивність потоку змінюється відповідно до прихованого марківського процесу. Це дозволяє апроксимувати трафік із змінною інтенсивністю, що характерно для відео- або мультимедійних потоків. Такий підхід забезпечує більш точне відтворення реальних умов роботи мережі та покращує якість обслуговування користувачів [4].

У прихованих марківських моделях (Hidden Markov Models, HMM) реальні стани трафіку приховані, а спостерігаються лише вихідні дані. Це дозволяє апроксимувати складні стохастичні процеси, де пряме

спостереження за станами неможливе або утруднене. НММ широко використовуються в задачах розпізнавання образів та обробки сигналів, що робить їх корисними для аналізу мережевого трафіку [5].

Когортно-марківські процеси (Batch Markovian Arrival Processes, BMAP) застосовуються для апроксимації трафіку, де пакети прибувають у групах (когортах), наприклад, у трафіку відеоконференцій. Це дозволяє моделювати ситуації, коли дані передаються не поодиночці, а пакетами, що є важливим для сучасних мережевих додатків [6].

Марківський процес прибуття (Markovian Arrival Process, MAP) є узагальненням ММРР, що дозволяє більш точно апроксимувати трафік із короточасними залежностями та автокореляцією. Це забезпечує гнучкість у моделюванні різних типів трафіку та покращує точність аналізу мережевих процесів [7].

Загалом методи апроксимації немарківського трафіку на основі марківських моделей дозволяють отримати зручні математичні представлення для аналізу продуктивності мереж та оптимізації систем керування трафіком [8–12].

Метою статті є розробка та аналіз методу апроксимації немарківського трафіку на основі марківських процесів із модульованою інтенсивністю (ММРР) для підвищення точності моделювання динамічних потоків даних у телекомунікаційних мережах. Дослідження спрямоване на виявлення можливостей застосування цього підходу для аналізу продуктивності мереж, оптимізації їхньої роботи та прогнозування змін у навантаженні.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі основні **завдання**:

- провести аналіз існуючих методів апроксимації немарківського трафіку та визначити їхні основні обмеження;
- дослідити математичні основи ММРР, сформулювати основні рівняння, що описують цей процес, та визначити його ключові параметри;
- розробити методику оцінки параметрів ММРР на основі реальних статистичних даних про трафік, використовуючи матричні методи та алгоритми оптимізації;
- виконати моделювання різних сценаріїв мережевого трафіку із застосуванням ММРР та провести порівняльний аналіз впливу на показники QoS;
- розробити рекомендації щодо практичного використання ММРР у задачах прогнозування навантаження та адаптивного керування мережевими ресурсами.

Виконання цих завдань дозволить сформувати науково обґрунтовану методику апроксимації трафіку та оцінити її ефективність у контексті сучасних телекомунікаційних технологій.

Викладення основного матеріалу. *Математичний опис ММРР: рівняння та ключові параметри.*

Марківські процеси з модульованою інтенсивністю (ММРР) є одним із основних методів апроксимації немарківського трафіку, що дозволяє враховувати змінність інтенсивності потоків у часі. Вони базуються на двох ключових компонентах: прихованому марківському процесі та пуассонівському потоці, інтенсивність якого змінюється відповідно до стану марківського ланцюга.

Формальне визначення ММРР полягає у тому, що ММРР – це пуассонівський процес, модульований скінченним ергодичним марківським ланцюгом із N станами. Нехай: $X(t)$ – прихований марківський процес, що приймає значення у множині станів $\{1, 2, \dots, N\}$, $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ – набір параметрів інтенсивності пуассонівських потоків для кожного стану, Q – матриця генератора марківського процесу, що визначає ймовірності переходів між станами. Інтенсивність пуассонівського потоку змінюється відповідно до поточного стану $X(t)$, що означає:

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) = k \mid X(t) = i) = \frac{(\lambda_i \Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda_i \Delta t}, \quad k \geq 0, \quad (1)$$

де λ_i – інтенсивність прибуття пакетів у стані i .

Свою чергою динаміка марківського ланцюга $X(t)$ визначається матрицею переходів Q , елементи якої q_{ij} позначають ймовірність переходу між станами i та j :

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1N} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{N1} & q_{N2} & \dots & q_{NN} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

де $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$, що забезпечує нормування ймовірностей переходів, а q_{ij} для $i \neq j$ визначає швидкість переходу між станами.

Ймовірність того, що процес перебуває у стані i в момент часу t , визначається вектором ймовірностей станів $\pi(t)$, який задовольняє рівняння Колмогорова:

$$\frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(t)Q. \quad (3)$$

У стаціонарному режимі стаціонарний вектор розв'язує рівняння:

$$\pi Q = 0, \quad \sum_{i=1}^N \pi_i = 1, \quad (4)$$

де $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$ – вектор стаціонарних ймовірностей перебування у кожному стані.

Далі, знаючи стаціонарні ймовірності, середня інтенсивність вхідного потоку трафіку визначається як:

$$\lambda_{avg} = \sum_{i=1}^N \pi_i \lambda_i. \quad (5)$$

Ця величина використовується для аналізу середнього навантаження на систему та оцінки її продуктивності.

Автокореляційна функція процесу MMPP може бути виражена через експоненційні компоненти:

$$R(\tau) = \lambda_{avg} + \sum_{i=1}^N c_i e^{-\frac{|\tau|}{T_i}}, \quad (6)$$

де T_i – характерний час зміни стану, а c_i – коефіцієнти, що залежать від інтенсивностей переходів, параметр τ позначає часовий лаг (затримку) між двома моментами часу, у яких аналізується кореляція інтенсивності потоку.

Оцінка параметрів MMPP зазвичай здійснюється методами максимального правдоподібності або методами моментів, які включають аналіз емпіричних даних трафіку для визначення матриці переходів Q , налаштування інтенсивностей λ_i таким чином, щоб середні значення та дисперсія потоку відповідали спостережуваним характеристикам, а також оптимізацію параметрів за допомогою алгоритмів мінімізації похибки апроксимації.

Модель MMPP є потужним інструментом для апроксимації немарківського трафіку, оскільки вона дозволяє моделювати змінну інтенсивність потоку, зберігаючи при цьому простоту марківських процесів. Використання рівнянь Колмогорова, матричних рівнянь та автокореляційної функції дозволяє коректно налаштовувати параметри MMPP та забезпечує точну апроксимацію реального трафіку в сучасних мережах.

Побудова марковської моделі немарковського потоку.

Реальний немарковський вхідний потік може бути розщеплено на елементарні складові, кожна з яких може бути описана розподілом Ерланга належного порядку. Ця важлива обставина дає змогу здійснити марковську апроксимацію кожної зі складових композиційного потоку. Розглянемо відповідну технологію стосовно випадку, коли вхідний потік є потоком Ерланга другого порядку. Цей потік формується, якщо звичайний пуассонівський потік (це потік Ерланга першого порядку) просіяти, виділивши кожен другу подію. При цьому можна умовно вважати, що непарна подія потоку не змінює стану системи, готуючи перехід, який реалізується при надходженні чергової парної події. Більш докладно: перехід системи з поточного стану в черговий здійснюється за два кроки. При цьому на першому кроці система переходить із поточного стану в деякий фіктивний, буферний, проміжний стан, а на другому кроці – у черговий істинний стан. По суті можна вважати, що реальний ерлангівський потік вкладений у фіктивний пуассонівський потік.

Таким чином, завдяки подвоєнню числа станів вихідної немарковської системи будується марковська система з пуассонівським вхідним потоком. Якщо тепер у цій отриманій системі виділяти й аналізувати тільки переходи в парні її стани, то поведінка системи відповідатиме поведінці вихідної системи, на вхід якої надходить потік Ерланга другого порядку.

Розглянемо n -канальну систему масового обслуговування з відмовами, на вхід якої надходить потік Ерланга другого порядку, одержуваного внаслідок просіювання пуассонівського потоку інтенсивності λ , а тривалість обслуговування розподілена експоненціально з параметром μ . Для опису функціонування системи використовуємо граф станів, наведений на рисунку 1.

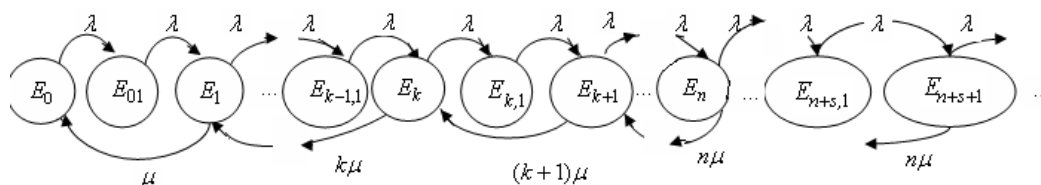


Рис. 1. Граф станів і переходів системи без втрат з ерлангівським вхідним потоком і експоненціальним обслуговуванням

На рисунку 1 зазначено, що:

E_k – стан, коли в системі зайнято рівно k каналів, $k = 0, 1, 2, \dots, n$;

$E_{k,1}$ – буферний стан, який відповідає ситуації, коли в системі зайнято рівно k каналів і надійшла нова заявка, що буде відсіяна і тому не впливає на зміну кількості зайнятих каналів, $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$;

$E_{n+s,1}$ – буферний стан, відповідний до ситуації, коли в системі зайнято рівно n каналів, у черзі s заявок і надійшла нова заявка, яку буде відсіяно;

E_{n+s+1} – стан, коли в системі зайнято n каналів і $(s+1)$ заявок перебувають у черзі;

λ – інтенсивність вхідного пуасонівського пуасонівського потоку, що просіюється;

μ – інтенсивність обслуговування.

Для отриманого графа станів і переходів сформуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих імовірностей станів системи. Система рівнянь має вигляд:

$$\begin{aligned}
-\lambda P_0 + \mu P_1 &= 0, \\
\lambda P_0 - \lambda P_{01} &= 0, \\
\lambda P_{01} + 2\mu P_2 - (\lambda + \mu)P_1 &= 0, \\
\lambda P_1 - \lambda P_{11} &= 0, \\
\lambda P_{11} + 3\mu P_3 - (\lambda + 2\mu)P_2 &= 0, \\
\ldots \ldots \ldots \\
\lambda P_{k-1} - \lambda P_{k-1,1} &= 0, \\
\lambda P_{k-1,1} + (k+1)\mu P_{k+1} - (\lambda + k\mu)P_k &= 0, \\
\ldots \ldots \ldots \\
\lambda P_{n-1} - \lambda P_{n-1,1} &= 0, \\
\lambda P_{n-1,1} + n\mu P_n &= 0, \\
\ldots \ldots \ldots \\
\lambda P_{n+s} - \lambda P_{n+s,1} &= 0, \\
\lambda P_{n+s,1} + n\mu P_{n+s+2} - (\lambda + n\mu)P_{n+s+1} &= 0. \\
\ldots \ldots \ldots
\end{aligned} \tag{7}$$

Отримана система рівнянь чисельно розв'язується традиційними методами.

Введемо матрицю інтенсивностей переходів (генератор процесу) A і стовпець вектор шуканих ймовірностей P таким чином:

$$A = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccccccccc} -\lambda & 0 & \mu & & & & & & \\ \lambda & -\lambda & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & \lambda & (\lambda + \mu) & 0 & 2\mu & & & & \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -(\lambda + 2\mu) & 0 & 3\mu & & \\ \hline & & & & & & & & \end{array} & \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ \hline |\bar{\lambda} \\ |0 \\ \hline | \end{array} & \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ \hline -\bar{\lambda} \\ \lambda \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ \hline - \\ n\mu \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ \hline - \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ \hline - \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ \hline - \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ \hline - \\ \hline \end{array} \\ P^T = (P_0 \ P_{01} \ P_1 \ \dots \ P_{k-1,1} \ P_k \ P_{k,1} \ P_{k+1} \ \dots \ P_n \ \dots \ P_{n+s,1} \ P_{n+s+1} \ \dots) \end{pmatrix},$$

Тоді розподіл ймовірностей станів, що шукається, визначається в результаті розв'язання векторно-матричного рівняння $AP = 0$, доповненого умовою нормування $\sum_i P_i = 1$.

Незважаючи на очевидну простоту отримання рішення, таке його уявлення незручно, тому що не забезпечує аналітичного опису залежності ймовірностей, що шукаються, станів від параметрів завдання і тому не дозволяє безпосередньо оцінити їх вплив на ефективність системи обслуговування. Водночас система рівнянь (7) допускає отримання рішення у явному вигляді з використанням наступного перетворення. Підсумовуючи друге рівняння з третім, четверте з п'ятим тощо, парне з наступним непарним, отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\lambda P_0 - \mu P_1 = 0, \\
&\lambda P_0 + 2\mu P_2 - (\lambda + \mu)P_1 = 0, \\
&\lambda P_1 + 3\mu P_3 - (\lambda + 2\mu)P_2 = 0, \\
&\dots\dots\dots \\
&\lambda P_{k-1} + (k+1)\mu P_{k+1} - (\lambda + k\mu)P_k = 0, \\
&\dots\dots\dots \\
&\lambda P_{n-1} + n\mu P_{n+1} - (\lambda + n\mu)P_n = 0, \\
&\dots\dots\dots \\
&\lambda P_{n+s} + n\mu P_{n+s+2} - (\lambda + n\mu)P_{n+s+1} = 0, \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{8}$$

Введемо:

$$\begin{aligned} z_k &= \lambda p_{k-1} - k\mu p_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ z_{n+s} &= \lambda p_{n+s-1} - p_{n+s}, \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

З урахуванням (9) запишемо систему (8) таким чином:

$$\begin{aligned}
z_1 &= 0, \\
z_1 - z_2 &= 0, \\
z_2 - z_3 &= 0, \\
&\dots\dots\dots \\
z_k - z_{k+1} &= 0, \\
z_n - z_{n+1} &= 0, \\
&\dots\dots\dots \\
z_{n+s} - z_{n+s+1} &= 0, \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Звідси

$$z_1 = z_2 = \dots = z_n = z_{n+1} = z_{n+s} = z_{n+s+1} = \dots = 0,$$

або

$$\begin{aligned}
\lambda P_{k-1} - k\mu P_k &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\
\lambda P_{n+s-1} - n\mu P_{n+s} &= 0, \quad s = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

З цих співвідношень випливають рекурентні формули

$$\begin{aligned}
P_k &= \frac{\lambda}{k\mu} P_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\
P_{n+s} &= \frac{\lambda}{n\mu} P_{n+s-1}, \quad s = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

з яких отримаємо

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{\lambda}{\mu} P_0, \\
P_2 &= \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{\lambda^2}{2!\mu^2} P_0, \\
&\dots\dots\dots \\
P_k &= \frac{\lambda}{k\mu} P_{k-1} = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} P_0, \\
&\dots\dots\dots \\
P_n &= \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} P_0, \\
&\dots\dots\dots \\
P_{n+s} &= \frac{\lambda^{n+s}}{n! n^s \mu^{n+s}} P_0, \quad s = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{10}$$

Зауважимо тепер, що з другого, четвертого тощо рівнянь системи (7) слідує:

$$\begin{aligned}
P_0 &= P_{01}, \\
P_1 &= P_{11}, \\
&\dots\dots\dots \\
P_{n-1} &= P_{n-1,1}, \\
&\dots\dots\dots \\
P_{n+s} &= P_{n+s,1}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Співвідношення (10) та (11) з урахуванням умови нормування дозволяють розрахувати значення P_0 .

При цьому

$$\sum_{k=0}^n P_k + \sum_{k=0}^n P_{k,1} + \sum_{s=1}^{\infty} P_{n+s} + \sum_{s=1}^{\infty} P_{n+s,1} = 2P_0 \left[\sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda^s}{(n\mu)^s} \right] = 1.$$

Як відомо, у n -канальній системі без втрат черга не зростатиме до нескінченності, якщо виконується нерівність $\lambda / \mu < n$. У цьому випадку

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^s = \frac{\frac{\lambda}{n\mu}}{1 - \frac{\lambda}{n\mu}} = \frac{\lambda}{n\mu - \lambda}.$$

При цьому рівняння для відшукування P_0 набуває вигляду

$$2P_0 \left[\sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \frac{\lambda^{n+1}}{n!\mu^n(n\mu - \lambda)} \right] = 1,$$

звідки

$$P_0 = \frac{1}{2 \left[\sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \frac{\lambda^{n+1}}{n!\mu^n(n\mu - \lambda)} \right]}.$$

Тоді

$$P_k = \frac{\frac{\lambda^k}{k! \mu^k}}{2 \left[\sum_{\ell=0}^n \frac{\lambda^\ell}{\ell! \mu^\ell} + \frac{\lambda^{n+1}}{n! \mu^n (n\mu - \lambda)} \right]}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$P_{n+s} = \frac{\frac{\lambda^{n+s}}{n! \mu^{n+s}}}{2 \left[\sum_{\ell=0}^n \frac{\lambda^\ell}{\ell! \mu^\ell} + \frac{\lambda^{n+1}}{n! \mu^n (n\mu - \lambda)} \right]}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Зрозуміло, що це співвідношення описують ймовірності станів $E_k, k = 0, 1, \dots, n, n+1, \dots, n+s, \dots$ у системі, відповідної графу, наведеному на рисунку 1. Разом з тим справжня ймовірність стану E_k для системи, на вхід якої надходить ерланговський потік другого порядку, дорівнює

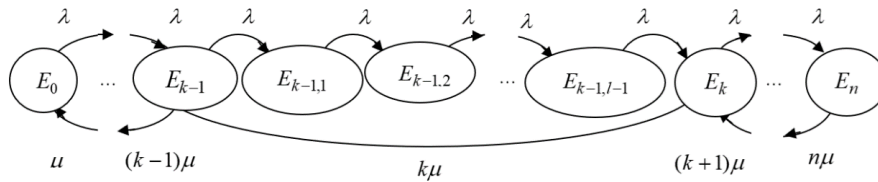
$$P_{k,E} = P_k + P_{k1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

звідки, з урахуванням (11), маємо

$$P_{k,E} = 2P_k = \frac{\frac{\lambda^k}{k! \mu^k}}{\left[\sum_{\ell=0}^n \frac{\lambda^\ell}{\ell! \mu^\ell} + \frac{\lambda^{n+1}}{n! \mu^n (n\mu - \lambda)} \right]}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, n+1, \dots$$

$$P_{n+s,E} = 2P_{n+s} = \frac{\frac{\lambda^{n+s}}{n! \mu^{n+s}}}{\left[\sum_{\ell=0}^n \frac{\lambda^\ell}{\ell! \mu^\ell} + \frac{\lambda^{n+1}}{n! \mu^n (n\mu - \lambda)} \right]}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Абсолютно аналогічно може бути проведений аналіз системи, на вхід якої надходить потік Ерланга l -го порядку. У цьому випадку у графі станів та переходів перед кожним справжнім станом необхідно ввести $(l-1)$ буферний стан, що описують переходи системи під впливом відсіюваних $(l-1)$ -х заявок, що не впливають на кількість зайнятих каналів системи. Відповідні співвідношення, з метою простоти, отримаємо для окремого випадку системи з відмовами. Фрагмент графа переходів для такої системи має вигляд (рис. 2):



$$\begin{aligned}
\lambda P_0 - \mu P_1 &= 0, \\
\lambda P_0 + 2\mu P_2 - (\lambda + \mu)P_1 &= 0, \\
\lambda P_1 + 3\mu P_3 - (\lambda + 2\mu)P_2 &= 0, \\
\ldots \ldots \ldots & \\
\lambda P_k + (k+1)\mu P_{k+1} - (\lambda + k\mu)P_k &= 0, \\
\ldots \ldots \ldots & \\
\lambda P_{n-1} - n\mu P_n &= 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Знову використовуємо

$$z_k = \lambda P_{k-1} - k\mu P_k$$

і запишемо систему (14) таким чином:

$$\begin{aligned}
z_1 &= 0, \\
z_1 - z_2 &= 0, \\
z_2 - z_3 &= 0, \\
\ldots \ldots \ldots & \\
z_k - z_{k+1} &= 0, \\
z_k &= 0.
\end{aligned}$$

Звідси

$$z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0$$

або

$$\lambda P_{k-1} - k\mu P_k = 0, k = 1, 2, \dots, n.$$

З цих співвідношень отримаємо ту саму рекурентну формулу

$$P_k = \frac{\lambda}{k\mu} P_{k-1},$$

з якої знову випливають звичайні формули Ерланга

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{\lambda}{\mu} P_0, \\
P_2 &= \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{\lambda^2}{2!\mu^2} P_0, \\
\ldots \ldots \ldots & \\
P_k &= \frac{\lambda}{k\mu} P_{k-1} = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} P_0, \\
\ldots \ldots \ldots & \\
P_n &= \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} P_0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Зауважимо тепер, що з другого, третього тощо рівнянь системи (13) слідує:

$$\begin{aligned}
P_0 &= P_{01}, \\
P_{01} &= P_{02}, \\
\ldots \ldots \ldots & \\
P_{0,l-2} &= P_{0,l-1}, \\
P_1 &= P_{11}, \\
\ldots \ldots \ldots & \\
P_{n-1} &= P_{n-1,1}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Співвідношення (15) та (16) з урахуванням умови нормування дозволяють розрахувати значення P_0 .

При цьому

$$\sum_{k=0}^n P_k + \sum_{m=1}^{l-1} \sum_{k=0}^{n-1} P_{k,m} = l \sum_{k=0}^{n-1} P_k + P_n = P_0 \left[l \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} \right] = 1.$$

Звідси

$$P_0 = \frac{1}{l \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}}. \tag{17}$$

Тоді, підставляючи (17) у (15), отримаємо

$$P_k = \frac{\frac{\lambda^k}{k!\mu^k}}{l \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{i!\mu^i} + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}}, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Справжня ймовірність стану E_k для системи, на вхід якої надходить ерланговський потік l порядку, дорівнює:

$$P_{k,E} = P_k + \sum_{m=1}^{l-1} P_{k,m}, k = 0, 1, \dots, n-1,$$

звідки з урахуванням (16) маємо

$$P_{k,E} = lP_k = \frac{l \frac{\lambda^k}{k! \mu^k}}{l \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{i! \mu^i} + \frac{\lambda^n}{n! \mu^n}}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (18)$$

$$P_{n,E} = P_n = \frac{\frac{\lambda^n}{n! \mu^n}}{l \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{i! \mu^i} + \frac{\lambda^n}{n! \mu^n}}. \quad (19)$$

Отримані співвідношення дозволяють здійснити марківську апроксимацію довільного вхідного потоку заявок з достатньою для практики точністю.

Порівняння втрат пакетів для марківської моделі та моделі, що її апроксимує. Було проведено порівняння двох підходів до моделювання вхідного потоку в багаторівневих бездротових мережах: марківського потоку, що базується на експоненційному розподілі, та його апроксимації за допомогою розподілу Ерланга. Основною метою дослідження є оцінка впливу вибору моделі потоку на ймовірність втрати пакетів залежно від рівня навантаження системи. Такий аналіз дозволяє визначити, наскільки точнішим є підхід на основі Ерланга та в яких умовах його застосування забезпечує кращу відповідність реальним мережевим характеристикам.

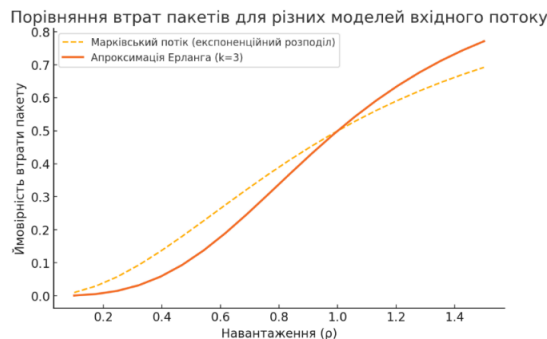


Рис. 3. Графік залежності ймовірності втрати пакетів від рівня навантаження ρ для двох моделей

Графік, наведений на рисунку 3, показує залежність ймовірності втрати пакетів від рівня навантаження ρ для двох моделей: марківського потоку (експоненційний розподіл) та апроксимації потоку за допомогою розподілу Ерланга. Основна мета такого порівняння – оцінити, наскільки точнішою є апроксимація Ерланга в контексті мережевого моделювання, особливо в умовах підвищеного навантаження.

Як видно з графіка, при малих значеннях навантаження обидві моделі дають дуже низькі значення втрат, що є очікуваним, оскільки система працює в незавантаженому режимі. Втрати пакетів залишаються близькими до нуля, що вказує на ефективну передачу без істотних перешкод.

Однак зі збільшенням навантаження розходження між моделями стає більш помітним. Марківська модель, яка базується на експоненційному розподілі, демонструє швидше зростання втрат порівняно з моделлю Ерланга. Це пояснюється тим, що експоненційний розподіл має вищу дисперсію, що призводить до більшої варіативності вхідного потоку і, відповідно, вищого рівня втрат у випадках перевантаження системи.

Апроксимація Ерланга, що враховує згладжений розподіл часу між подіями, дає більш стабільний потік із меншими піками навантаження. Як наслідок, вона забезпечує нижчі втрати в умовах високого трафіку. Це робить її більш точною моделлю для реальних мережесценаріїв, де трафік не є повністю випадковим, а має певну структурованість.

Таким чином, апроксимація Ерланга є кращим підходом для прогнозування втрат у системах, де потік заявок має певну впорядкованість, наприклад, у мережах з пакетним передаванням даних або поточковими сервісами. Використання цієї моделі дозволяє отримати точніші оцінки продуктивності та забезпечити ефективніший розподіл ресурсів у багаторівневих бездротових мережах.

Було проведено порівняння середньої довжини черги пакетів залежно від рівня навантаження для двох моделей: марківського потоку (експоненційний розподіл) та його апроксимації розподілом Ерланга. Це дослідження дозволяє оцінити, як вибір моделі вхідного потоку впливає на накопичення пакетів у системі та які наслідки це має для продуктивності мережі. Аналіз отриманих результатів допомагає зрозуміти, який підхід забезпечує більш точне прогнозування завантаженості системи та ефективнішу роботу бездротових мереж у реальних умовах експлуатації.

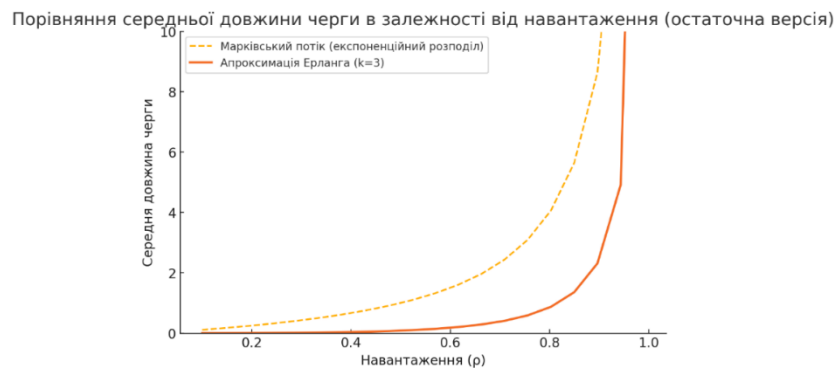


Рис. 4. Графік залежності довжини черги пакетів від рівня навантаження ρ для двох моделей

Графік, наведений на рисунку 4, демонструє залежність середньої довжини черги від рівня навантаження ρ для двох моделей: марківського потоку (експоненційний розподіл) та апроксимації потоку Ерланга. Даний аналіз дозволяє оцінити, наскільки використання апроксимації покращує прогнозування черги в системі.

При низьких значеннях навантаження обидві моделі дають майже однакові результати, оскільки ймовірність формування черги залишається мінімальною. Однак зі зростанням навантаження спостерігається значне розходження між цими підходами. У випадку марківської моделі довжина черги починає різко зростати, особливо коли ρ наближається до 1, що вказує на високий рівень накопичення пакетів у системі.

На відміну від цього, модель з апроксимацією Ерланга демонструє менш стрімке зростання черги навіть при підвищеному навантаженні. Це пояснюється тим, що розподіл Ерланга краще згладжує часові варіації вхідного потоку, зменшуючи пікові навантаження. Як наслідок, система зберігає більш контрольовану довжину черги, що є критичним для підтримки стабільної продуктивності мережі.

Таким чином, апроксимація Ерланга є більш точною моделлю для оцінки навантаження в мережевих системах, особливо в умовах високої завантаженості. Вона дозволяє знизити ризик неконтрольованого зростання черги та забезпечує більш точне планування ресурсів у бездротових мережах.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Для моделювання вхідного потоку в багаторівневій мережі застосовується апроксимація за допомогою процесу Ерланга певного порядку. Такий підхід дозволяє гнучко налаштовувати параметри розподілу часу між подіями, що є критичним для точності аналітичних оцінок продуктивності мережі.

Вхідний трафік представлений як суперпозиція незалежних подій, які надходять у систему відповідно до узагальненого пуассонівського процесу. Для його апроксимації використовується розподіл Ерланга порядку k , що є сукупністю k незалежних експоненційних розподілів із середньою інтенсивністю надходження заявок λ .

Ключове рівняння для функції щільності ймовірності часу між подіями:

$$f(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!}, \quad t \geq 0. \quad (20)$$

Це дозволяє описати часовий розподіл вхідного трафіку більш точно, ніж простий експоненційний розподіл, забезпечуючи відповідність емпіричним характеристикам мережевого навантаження.

Для оцінки продуктивності мережі використовується метод моментів, що дозволяє обчислити основні характеристики системи без потреби у складних чисельних розв'язках. При цьому параметри k та λ визначаються на основі середнього та дисперсії міжподійних інтервалів, отриманих з експериментальних даних або імітаційного моделювання.

Такий підхід дозволяє отримати узагальнену оцінку характеристик навантаження системи та забезпечує достатню точність для практичних задач оптимізації продуктивності багаторівневих бездротових мереж.

Марківський процес із модульованою інтенсивністю (ММРП) є потужним інструментом для прогнозування навантаження в телекомунікаційних мережах та адаптивного керування ресурсами. Його використання дозволяє враховувати змінність трафіку, адаптуючи параметри системи відповідно до поточних умов. Для ефективного застосування ММРП необхідно проаналізувати статистичні характеристики вхідного потоку, такі як середня інтенсивність, автокореляція та спектральна структура. Це дає змогу налаштувати модель таким чином, щоб вона максимально точно відтворювала реальні сценарії змінного навантаження.

Практичне використання ММРП у керуванні мережевими ресурсами враховує динамічне налаштування пропускну здатності, управління чергами та оптимізацію стратегії буферизації. Наприклад,

у мережах із потоковими мультимедійними сервісами MMPP допомагає передбачати періоди підвищеного навантаження та завчасно перерозподіляти ресурси. Завдяки можливості враховувати змінну інтенсивність потоку ця модель дозволяє розробляти адаптивні алгоритми маршрутизації та регулювання якості обслуговування (QoS), що підвищує ефективність роботи мережі та зменшує ймовірність перевантаження.

Марківська апроксимація немарківського трафіку є важливим методом для аналізу продуктивності телекомунікаційних систем, де вхідний потік даних має складну кореляційну структуру. У цьому дослідженні розглядається підхід до апроксимації, заснований на використанні розподілу Ерланга для моделювання часу між подіями. Це дозволяє враховувати змінність інтенсивності трафіку та його кореляційні властивості, які не можуть бути адекватно описані простим експоненційним розподілом.

Порівняння результатів показує, що при низьких рівнях навантаження (ρ) обидві моделі дають подібні результати щодо втрат пакетів та довжини черги. Однак зі зростанням навантаження експоненційна модель демонструє різкіші коливання та вищі значення втрат, тоді як апроксимація Ерланга забезпечує більш стабільну оцінку. Це пояснюється тим, що модель Ерланга дозволяє краще узгодити часові інтервали між подіями з реальною поведінкою мережевого трафіку.

Практичне застосування апроксимації Ерланга до оцінки продуктивності мереж дозволяє покращити точність прогнозування затримок і завантаженості черг. Такий підхід є особливо корисним для систем із високою змінністю навантаження, наприклад, у мультимедійних потокових сервісах та інтернет-трафіку. Таким чином, використання апроксимації Ерланга є ефективним методом для покращення аналітичних моделей продуктивності телекомунікаційних систем, забезпечуючи кращу відповідність до реальних умов роботи мережі.

Список використаної літератури:

1. Zhang Y. Fractal Traffic Modeling in Broadband Networks Using Wavelet Techniques / Y.Zhang, H.Li, M.Xu // IEEE Access. – 2021. – Vol. 9. – P. 33512–33524. DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3061735.
2. Chen W. Dynamic Resource Allocation in SDN via Markov Decision Processes / W.Chen, J.Li // Computer Networks. – 2022. – Vol. 204. DOI: 10.1016/j.comnet.2021.108693.
3. Horváth G. Phase-Type Approximation of Heavy-Tailed Network Traffic Models / G.Horváth, M.Telek // Performance Evaluation. – 2021. – Vol. 147–148. DOI: 10.1016/j.peva.2020.102178.
4. Gao K. Modeling of Multimedia Traffic with MMPP for QoS Provisioning / K.Gao, Y.Wang // Journal of Network and Systems Management. – 2021. – Vol. 29. – 45 p. DOI: 10.1007/s10922-021-09592-y.
5. Rabiner L. Hidden Markov Models in Network Traffic Analysis / L.Rabiner // IEEE Communications Surveys & Tutorials. – 2022. – Vol. 24, № 2. – P. 123–145. DOI: 10.1109/COMST.2022.3145678.
6. He Q. Batch Markovian Arrival Process Modeling for Video Conference Traffic / Q.He, L.Zhu // Computer Communications. – 2023. – Vol. 206. – P. 50–61. DOI: 10.1016/j.comcom.2022.11.013.
7. Kim J. Generalized Markovian Arrival Process for Short-Range Dependence Traffic / J.Kim, S.Park // Performance Evaluation Review. – 2024. – Vol. 52, № 1. – P. 23–35. DOI: 10.1145/3591178.3591190.
8. Іванов І. Марковські моделі трафіку в телекомунікаційних мережах / І.Іванов, А.Петренко // Вісник НТУ «ХПІ». – 2021. – № 3. – С. 45–52.
9. Мельник О. Self-Similar Traffic Approximation Using MAP Models / О.Мельник, В.Кулик // Cybernetics and Systems Analysis. – 2022. – Vol. 58. – P. 112–123. DOI: 10.1007/s10559-022-00511-7.
10. Zhou T. Advances in Network Traffic Modeling: A Review of Markovian Approaches / T.Zhou, Y.Liu // ACM Computing Surveys. – 2023. – Vol. 55, No. 12. – P. 1–36. DOI: 10.1145/3571125.
11. Petrov P. Traffic Engineering with Phase-Type Distributions in 5G Networks / P.Petrov, D.Kuznetsov // Ad Hoc Networks. – 2024. – Vol. 150. DOI: 10.1016/j.adhoc.2024.103120.
12. Кузів М. Аналіз QoS у SDN з використанням MAP-моделей / М.Кузів // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2022. – № 5. – С. 33–40.

References:

1. Zhang, Y., Li, H. and Xu, M. (2021), «Fractal Traffic Modeling in Broadband Networks Using Wavelet Techniques», *IEEE Access*, Vol. 9, pp. 33512–33524, doi: 10.1109/ACCESS.2021.3061735.
2. Chen, W. and Li, J. (2022), «Dynamic Resource Allocation in SDN via Markov Decision Processes», *Computer Networks*, Vol. 204, doi: 10.1016/j.comnet.2021.108693.
3. Horváth, G. and Telek, M. (2021), «Phase-Type Approximation of Heavy-Tailed Network Traffic Models», *Performance Evaluation*, Vol. 147–148, doi: 10.1016/j.peva.2020.102178.
4. Gao, K. and Wang, Y. (2021), «Modeling of Multimedia Traffic with MMPP for QoS Provisioning», *Journal of Network and Systems Management*, Vol. 29, 45 p., doi: 10.1007/s10922-021-09592-y.
5. Rabiner, L. (2022), «Hidden Markov Models in Network Traffic Analysis», *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, Vol. 24, No. 2, pp. 123–145, doi: 10.1109/COMST.2022.3145678.
6. He, Q. and Zhu, L. (2023), «Batch Markovian Arrival Process Modeling for Video Conference Traffic», *Computer Communications*, Vol. 206, pp. 50–61, doi: 10.1016/j.comcom.2022.11.013.
7. Kim, J. and Park, S. (2024), «Generalized Markovian Arrival Process for Short-Range Dependence Traffic», *Performance Evaluation Review*, Vol. 52, No. 1, pp. 23–35, doi: 10.1145/3591178.3591190.

8. Ivanov, I. and Petrenko, A. (2021), «Markovski modeli trafiku v telekomunikatsiynykh merezhakh», *Visnyk NTU «KhPI»*, No. 3, pp. 45–52.
9. Melnyk, O. and Kulyk, V. (2022), «Self-Similar Traffic Approximation Using MAP Models», *Cybernetics and Systems Analysis*, Vol. 58, pp. 112–123, doi: 10.1007/s10559-022-00511-7.
10. Zhou, T. and Liu, Y. (2023), «Advances in Network Traffic Modeling: A Review of Markovian Approaches», *ACM Computing Surveys*, Vol. 55, No. 12, pp. 1–36, doi: 10.1145/3571125.
11. Petrov, P. and Kuznetsov, D. (2024), «Traffic Engineering with Phase-Type Distributions in 5G Networks», *Ad Hoc Networks*, Vol. 150, doi: 10.1016/j.adhoc.2024.103120.
12. Kuziv, M. (2022), «Analiz QoS u SDN z vykorystanniam MAP-modelei», *Naukovi visti NTUU «KPI»*, No. 5, pp. 33–40.

Пустовойтов Павло Євгенович – доктор технічних наук, професор Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».

<https://orcid.org/0000-0003-3884-0200>.

Наукові інтереси:

- інформаційно-телекомунікаційні системи;
- програмування;
- вебсистеми.

E-mail: pavlo.pustovoitov@khi.edu.ua.

Компанієць Володимир Олександрович – старший викладач Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».

<https://orcid.org/0000-0003-2909-6993>.

Наукові інтереси:

- телекомунікаційні системи і технології;
- захист інформації.

E-mail: Volodymyr.Kompaniets@khi.edu.ua.

Pustovoitov P.E., Kompaniets V.O.

Markov approximation of network traffic using hidden state models

Markov approximation of non-Markovian traffic is an important method for analyzing the performance of telecommunication systems where the incoming data stream has a complex correlation structure. The paper considers an approximation method based on Markov processes with modulated intensity (MMPP). This model allows modeling traffic with variable intensity that varies according to a hidden Markov process. The main advantage of this approach is the ability to reproduce the statistical properties of real traffic, in particular its autocorrelation and variability of the intensity of packet flows.

The MMPP model is built on the basis of a Poisson process, the intensity of which varies according to the transitions between the states of the Markov chain. The paper presents a mathematical formalization of this model, in particular, the definition of the transition matrix between the states and the flow intensity parameters for each state. This allows for precise control of the behavior of network traffic in dynamic conditions, where significant load fluctuations are observed.

Considerable attention is paid to methods for tuning MMPP parameters. For this purpose, parameter estimation methods based on the analysis of experimental traffic data are used. Kolmogorov-Chapman matrix equations are used to calculate the state probabilities and the average flow intensity in each state. An important aspect is the correct choice of the number of states in the Markov chain, since the accuracy of the approximation depends on this.

The practical application of MMPP is considered in the context of networks with video and multimedia content streams, where traditional models do not take into account the variable traffic intensity. Due to the ability to simulate periods of high and low load, MMPP allows you to effectively analyze the behavior of such networks and optimize their performance. The paper provides examples of real traffic data that were approximated, which confirms the effectiveness of the method.

However, the MMPP method has certain limitations. In particular, the process of tuning the model can be computationally complex, since the selection of Markov process parameters requires significant computing resources. In addition, for a correct approximation, it is necessary to have a large amount of statistical data on traffic so that the obtained parameters correspond to the real behavior of the network.

Thus, the use of MMPP is an effective approach to approximating non-Markovian traffic, which provides flexibility and accuracy in reproducing its parameters. The practical implementation of this method requires a careful approach to parameter tuning, but its application allows significantly increasing the accuracy of the analysis of the performance of telecommunication systems.

Keywords: Markov approximation; flow intensity; traffic modeling; mathematical tools; method; model; telecommunication system.

Стаття надійшла до редакції 16.09.2025.