

Ю.О. Подчашинський, д.т.н., проф.
О.О. Лугових, ст. викладач

Державний університет «Житомирська політехніка»

Дослідження точнісних характеристик методів чисельного диференціювання та інтегрування вимірювальних сигналів про параметри руху

У статті представлено оцінку точнісних характеристик методів чисельного диференціювання та інтегрування, що застосовуються у комп'ютеризованому приладі для вимірювання параметрів руху об'єктів. Це технологічне обладнання та промислові вироби на каменедобувних та каменеобробних підприємствах, для яких в ході контролю за технологічним процесом потрібно визначати поточні координати, параметри руху та точність позиціонування. Вказані вимірювання базуються на знаходженні похідної від поточних координат, виміряних за відеозображеннями від цифрової відеокамери, та інтегрування сигналу прискорень від акселерометра. В статті проаналізовано взаємозв'язок похибок з апіорними моделями, що використовуються для опису руху обладнання та виробів. Відповідно до цього і визначаються методичні похибки перетворення вимірювальних сигналів, похибки визначення параметрів руху, обумовлені початковим похибками цих сигналів, а також оцінюється неідеальність відтворення моделі руху елементами технологічного обладнання.

Для визначення параметрів руху в реальному часі використовуються формули чисельного диференціювання назад, для обробки накопичених значень координат – симетричні формули чисельного диференціювання. Чисельне інтегрування даних від акселерометра для рівномірного руху базується на апроксимації нульового порядку підінтегральної функції (метод прямокутників). Для рівноприскореного руху доцільно застосовувати формулу прямокутників для отримання швидкості та формулу трапецій (лінійна апроксимація) для отримання поточних координат.

Отримані результати дозволяють: підвищити точність вимірювань параметрів руху комп'ютеризованим приладом; автоматизувати процеси вимірювання параметрів руху обладнання та промислових виробів у процесі їх виготовлення та процеси контролю якості.

Ключові слова: параметри руху; чисельне диференціювання; чисельне інтегрування; цифрова відеокамера; акселерометр; методична похибка; апіорна модель руху.

Актуальність теми. Передумовою виготовлення якісної промислової продукції є дотримання всіх вимог технологічного процесу. Для каменедобувних та каменеобробних підприємств важливою складовою контролю за технологічними процесами є вимірювання поточних координат та параметрів руху технологічного обладнання та промислових виробів, що виготовляються [1–4].

Такі вимірювання здійснюються комп'ютеризованим приладом, що використовує цифрову відеокамеру та акселерометр як датчики вимірювальної інформації про параметри руху [5–7]. Цифрова відеокамера формує відеозображення з поточними координатами об'єкта вимірювань, акселерометр формує сигнал про прискорення цього об'єкта.

Взаємозв'язок між поточними координатами та параметрами руху визначається операціями диференціювання та інтегрування з використанням координатного способу опису руху [8].

У комп'ютеризованому приладі диференціювання та інтегрування здійснюється чисельними методами [9, 10]. Ці методи є наближеними та вимагають ретельного аналізу методичних похибок та похибок, обумовлених наявними похибками початкових даних (трансформовані похибки).

Таким чином, тема дослідження є актуальною та дозволить підвищити точність вимірювань параметрів руху й удосконалити контроль за технологічним процесом каменедобувних та каменеобробних підприємств.

Аналіз останніх досліджень та публікацій, на які спираються автори. Комп'ютеризований прилад вимірює неелектричні величини (параметри руху) шляхом їх перетворення в електричні сигнали вимірювальної інформації, що далі представлені цифровими кодами після аналого-цифрового перетворення та які підлягають програмно-алгоритмічній обробці в обчислювальному пристрої [11, 12], в тому числі – шляхом диференціювання та інтегрування.

Типові структури та принципи побудови таких засобів вимірювань розглянуто в [13–15], але в цих джерелах не враховано можливість використання двовимірної інформації про параметри руху, отриманої безконтактним шляхом. Публікації щодо побудови систем технічного зору, інформаційних та мультимедійних систем [16–18] не враховують завдання високоточної обробки вимірювальної інформації про параметри руху в реальному часі.

Чисельні методи інтегрування та диференціювання досліджені у багатьох наукових та методичних працях. Але їх точність розглядається як така, що обумовлена методичною похибкою перетворень та

обмеженою кількістю доданків у апроксимаційних формулах [9, 10, 19]. В цьому випадку необхідно проаналізувати взаємозв'язок похибок з апіорними моделями, що використовуються для опису руху обладнання та виробів. Відповідно до цього і визначаються методичні і трансформовані похибки перетворення вимірювальних сигналів, а також оцінюється неідеальність відтворення моделі руху елементами реально існуючого обладнання.

Метою статті є дослідження точнісних характеристик методів чисельного диференціювання та інтегрування для визначення параметрів руху технологічного обладнання та промислових виробів за їх відеозображеннями, а також забезпечення контролю за ходом технологічного процесу на каменедобувних та каменеобробних підприємствах.

Викладення основного матеріалу. Визначення параметрів руху (швидкостей та прискорення) об'єктів вимірювань (технологічного обладнання та виробів на каменедобувних та каменеобробних підприємствах) базується на знаходженні похідної від поточних координат, виміряних за відеозображеннями від цифрової відеокамери.

Іншим варіантом є інтегрування вихідного сигналу акселерометра, що закріплений на об'єкті вимірювань, та знаходження швидкостей та поточних координат цього об'єкта. Відповідно до цього, структурні схеми комп'ютеризованого приладу для вимірювання параметрів руху повинні містити блоки диференціювання та інтегрування вимірювальних сигналів. Аналітичні формули цих операцій наведено в [8, 10]. Операції інтегрування та диференціювання в засобах вимірювань можуть бути реалізовані механічними, електромеханічними, електронними та цифровими обчислювальними блоками [21– 24].

Враховуючи розробку саме комп'ютеризованого приладу, в якому сигнали датчиків безпосередньо перетворюються в цифровий код, операції інтегрування та диференціювання виконуються обчислювальними засобами комп'ютеризованого приладу в цифровій формі. Відповідно до цього, застосовуються чисельні методи диференціювання та інтегрування до відліків поточних координат та поточних прискорень об'єктів вимірювань.

Чисельне диференціювання відліків поточних координат полягає в тому, що поточну координату $x(t)$ на заданому відрізку $[t_1, t_2]$ апроксимують функцією $\varphi(t)$ таким чином, що похідні від функцій $x(t)$ і $\varphi(x)$ збігаються з певною похибкою. Похибка апроксимації поточної координати (залишковий доданок формули апроксимації) дорівнює:

$$R(t) = x(t) - \varphi(t),$$

а методична похибка чисельного методу

$$R'(t) = x'(t) - \varphi'(t),$$

Відповідно до цього

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{d\varphi(t)}{dt},$$

де $t_1 \leq t \leq t_2$.

Аналогічно знаходять похідні вищих порядків. При цьому апроксимуюча функція $\varphi(t)$ задається у вигляді полінома з числом доданків, що відповідає математичній моделі руху об'єкта згідно з апіорними відомостями про нього.

У загальному випадку наближене чисельне диференціювання є менш точною операцією, ніж інтегрування та апроксимація, тому що для як завгодно близьких функцій $x(t)$ і $\varphi(t)$ різниця між їх похідними може бути досить великою. Це обумовлено також і тим, що значення координат, які входять до формул диференціювання, містять похибку. Однак застосовуючи виключення грубих помилок та згладжування поточних значень координат, можна отримати результат із необхідною точністю.

Функція $x(t)$ для методів чисельного диференціювання може бути апроксимована $\varphi(t)$ на основі інтерполяційного поліному Ньютона, інтерполяційного поліному Лагранжа, методу невизначених коефіцієнтів [10, 19, 20].

Також слід враховувати, що в комп'ютеризованому приладі відеопослідовність сформована з постійним міжкадровим інтервалом τ . Тому маємо рівновіддалені відліки поточних координат, що збігаються з вузлами інтерполяції полінома, а похідна обчислюється саме в цих вузлах. У результаті інтерполяційна формула для похідної (швидкості руху) набуває вигляду [19]:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} \left(\nabla x(t_0) - \frac{\nabla^2 x(t_0)}{2} + \frac{\nabla^3 x(t_0)}{3} - \frac{\nabla^4 x(t_0)}{4} + \dots \right), \quad (1)$$

де $\nabla^m x_0$ – скінчена різниця m -порядку,

$$\nabla x(t_0) = x(t_0 + \tau) - x(t_0),$$

$$\nabla^2 x(t_0) = \nabla x(t_0 + \tau) - \nabla x(t_0),$$

$$\nabla^m x(t_0) = \nabla^{m-1} x(t_0 + \tau) - \nabla^{m-1} x(t_0).$$

Для обчислення швидкості за апіорною фізичною моделлю рівномірного та рівноприскореного руху можна використати лінійну та квадратичну апроксимацію, тобто залишити в формулі (1) один чи два доданки. З точки зору чисельних методів $R(t)$ є методичною похибкою визначення швидкості рівномірного та рівноприскореного руху.

Реальний рух об'єкта вимірювань може мати відхилення від рівномірної чи рівноприскореної траєкторії. Ці відхилення треба зафіксувати комп'ютеризованим приладом з метою контролю за ходом технологічного процесу.

В цьому випадку треба залишити більшу кількість доданків у формулі (1).

Згідно з [19] методична похибка формул чисельного диференціювання дорівнює:

$$R'(t_0) \approx \frac{(-1)^k \nabla^{k+1} x(t_0)}{\tau(k+1)}.$$

На основі методів інтерполяції виводяться методи чисельного диференціювання. Загалом серед чисельних методів вирізняють формули диференціювання вперед, назад та симетричні формули. В комп'ютеризованому приладі для накопичених значень координат потрібно використовувати симетричні формули, для оцінки параметрів руху в реальному часі формули диференціювання назад.

Вирізнимо особливості і обмеження на застосування методів програмно-алгоритмічної обробки, виходячи з фізичної суті задачі знаходження параметрів руху:

1) функція для апроксимації в процедурі чисельної інтерполяції – це поліном нульового, першого чи другого степеня (об'єкт вимірювань знаходиться в нерухомому стані, здійснює рівномірний або рівноприскорений рух). Степінь поліному визначається, виходячи з апіорної моделі технологічного процесу на виробництві;

2) виходячи з апіорної моделі руху, степінь поліному m набагато менший за кількість результатів вимірювань (вузлів інтерполяції) n , тобто $m \ll n$;

3) функція інтерполяції і результати вимірювань та оцінки параметрів руху відрізняються на: методичну похибку, інструментальну похибку та власне прояви нерівномірності руху обладнання, які треба оцінити. Методичну похибку можна оцінити і врахувати. Інструментальна похибка зменшується методами попередньої обробки результатів вимірювань, в тому числі виключенням грубих помилок та експоненціальним згладжуванням.

Виокремимо методи, що застосовуються для програмно-алгоритмічної обробки результатів вимірювань та визначення параметрів руху:

1) попередня обробка результатів вимірювань: виключення грубих помилок, ковзне середнє та експоненціальне згладжування, виставлення осей чутливості акселерометра та оцінка взаємного розташування відеокамери та акселерометра в тривимірному просторі;

2) режим вимірювань параметрів руху в реальному часі для визначення та контролю миттєвих значень параметрів руху обладнання: фільтр Калмана, комплексування вимірювальних каналів, метод максимальної правдоподібності та метод найменших квадратів у варіанті для реального часу, чисельне диференціювання назад та інтегрування;

3) режим вимірювання параметрів руху на основі обробки накопичених результатів вимірювань з метою визначення параметрів руху та оцінку нерівномірності руху обладнання: метод максимальної правдоподібності, метод найменших квадратів, чисельне інтегрування та диференціювання на основі симетричних формул.

Параметри руху ОБ (переміщення $dx_i = x_i^* - x_{i-1}^*$, швидкість $v_i = dx_i / dt$ та прискорення $a_i = dv_i / dt$) визначаються по кожній координаті $x_{ci}^*, y_{ci}^*, x_{ki}^*, y_{ki}^*, \alpha_i^*$ із зведенням отриманих результатів до векторів переміщення, швидкості та прискорення ОБ (змінною x_i^* може бути позначена будь-яка з координат x_{ci}^*, y_{ci}^* – координати центру мас об'єкту, x_{ki}^*, y_{ki}^* – координати контурних точок, α_i^* – кут повороту об'єкту). Найпростішим методом визначення параметрів руху в даному випадку є чисельне диференціювання [9–11].

Визначення швидкості та прискорень об'єктів вимірювання в реальному часі здійснюється шляхом чисельного диференціювання [11] по кожній з координат:

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{x_i^* - x_{(i-q)}^*}{q \cdot \tau}, \quad q = 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

$$a_i = \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \left[\frac{dx_i}{dt} - \frac{dx_{(i-q)}}{dt} \right] / dt = \frac{x_i^* - 2x_{(i-q)}^* + x_{(i-2q)}^*}{(q \cdot \tau)^2},$$

Відповідно для накопичених відліків координат формули мають вигляд:

$$v_i = \frac{x_{(i+q)}^* - x_{(i-q)}^*}{2 \cdot q \cdot \tau}, \quad a_i = \frac{x_{(i+q)}^* - 2x_i^* + x_{(i-q)}^*}{(q \cdot \tau)^2}. \quad (3)$$

Для оцінки нерівномірності руху за миттєвими значеннями $q = 1$. Для згладжених інтегральних оцінок $q > 1$.

Вимірювання поточних координат в комп'ютеризованому приладі за цифровим відеозображенням здійснюються з похибкою Δ_x .

Це призводить до виникнення відповідної складності похибки визначення параметрів руху (трансформована похибки) що для чисельного диференціювання в реальному часі (формули (2)) дорівнює [11]:

$$\Delta_{v_{\text{тр}}} = \frac{2\Delta_x}{q \cdot \tau}, \quad \Delta_{a_{\text{тр}}} = \frac{4\Delta_x}{(q \cdot \tau)^2}, \quad (4)$$

а для формул накопичених даних (формули (3)):

$$\Delta_{v_{\text{тр}}} = \frac{\Delta_x}{q \cdot \tau}, \quad \Delta_{a_{\text{тр}}} = \frac{4\Delta_x}{(q \cdot \tau)^2}. \quad (5)$$

Згідно з формулами (4) та (5), трансформована похибка має максимальне значення:

1) при визначенні миттєвих значень параметрів руху ($q = 1$); при дослідженні об'єктів, що швидко рухаються;

2) при адаптивному налаштуванні цифрова відеокамера з високою частотою кадрів ($\tau \ll 1$).

Методична похибка чисельного диференціювання дорівнює залишковому доданку $R(t)$ [11, 20] для формул (2)

$$\Delta_{v_{\text{мет}}} = \frac{\tau}{2} \ddot{x}(\xi), \quad \Delta_{a_{\text{мет}}} = \tau \ddot{x}(\xi),$$

де ξ – деяке значення аргументу на інтервалі диференціювання, а для формул (3)

$$\Delta_{v_{\text{мет}}} = -\frac{\tau^2}{6} \ddot{x}(\xi), \quad \Delta_{a_{\text{мет}}} = -\frac{\tau^2}{12} x^{(4)}(\xi).$$

Для рівноприскореного руху об'єкта вимірювань з прискоренням $a_0 = \text{const}$: $\ddot{x}(\xi) = a_0$; $\ddot{x}(\xi) = x^{(4)}(\xi) = 0$ і методична похибка

$$\Delta_{v_{\text{мет}}} = \frac{\tau}{2} a_0$$

для визначення параметрів руху в реальному часі, всі інші методичні похибки дорівнюють нулю.

Чисельне інтегрування відліків прискорення від акселерометра дозволяє знайти поточні значення швидкості та прискорення об'єкта вимірювань.

Чисельні методи інтегрування базуються на інтерполяційному поліномі Ньютона та інтерполяційному поліномі Лагранжа. Обчислювальні формули для інтегрування вимірюваних значень поточних прискорень отримуються згідно з процедурою аналітичного інтегрування названих інтерполяційних формул.

Знаходження значень швидкості та поточної координати для моменту часу t у вимірювальному каналі, побудованому на основі акселерометра, вимагає виконання двократної операції інтегрування:

$$x(t) = \int_{t_0}^t v(t) dt, \quad v(t) = \int_{t_0}^t a(t) dt,$$

де t_0 – час початку вимірювань.

В комп'ютеризованому приладі отримуємо послідовність цифрових відліків $a_i(t_i)$ в моменти часу $t_0, t_0 + h, t_0 + 2h, \dots, t_0 + ih, \dots, t$, де h – крок чисельного методу інтегрування, що в початкових налаштуваннях збігається з міжкадровим інтервалом τ відеопослідовності. Інтегрування здійснюється чисельними методами з кроком h , що використовують інтерполяцію прискорення функцією $\varphi(t)$ та мають методичну похибку $R(t)$ [10, 19, 20]:

$$\int_{t_0}^t a(t) dt = \int_{t_0}^t \varphi(t) dt + R(t).$$

У методі прямокутників використовується апроксимація нульового порядку для підінтегральних значень прискорення, а результат інтегрування знаходиться за формулою [19, 20]:

$$v(t) = \int_{t_0}^t a(t) dt = h \sum_{i=0}^{n-1} a(t_0 + ih) + R_{np}(a, h),$$

а методична похибка (залишковий доданок) дорівнює

$$R_{np}(a, h) = \frac{t_k - t_0}{2} \cdot h \cdot a'(\xi), \quad t_0 \leq \xi \leq t_k.$$

Відповідно для лінійної апроксимації в формулі трапецій [19]

$$v(t) = \int_{t_0}^t a(t) dt = \frac{h}{2} \left[a(t_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} a(ih) + a(t_k) \right] + R_{np}(a, h),$$

$$|R_{np}(a, h)| \leq \frac{h^2(t_k - t_0)}{12} M_2, \quad M_2 = \max_{t_0 \leq \xi \leq t_k} |a''(\xi)|.$$

Як бачимо з наведених формул, методична похибка обчислення в реальному часі швидкості та координати прямо пропорційна інтервалу часу h між сусідніми дискретними відліками. Для підвищення точності комп'ютеризованого приладу треба зменшувати цей інтервал. Але зменшення кроку в реальному часі збільшує кількість обхідних обчислювальних операцій, яка обмежена обчислювальними можливостями процесора або мікроконтролера комп'ютеризованого приладу. Таким чином, маємо суперечність між необхідністю забезпечення максимальної точності та швидкодії комп'ютеризованого приладу. Для вирішення цієї суперечності пропонується адаптоване налаштування кроку інтегрування згідно з оцінкою поточних значень параметрів руху, що вимірюються. Детально ця пропозиція викладена у [7, 25].

Вибір функції $\varphi_a(t)$ та відповідного методу чисельного інтегрування визначаються апріорною математичною моделлю руху об'єкта вимірювань.

Для рівномірного руху об'єкта вимірювань $a(t) = 0$, $v(t) = v_0$, $x(t) = \int v(t) dt + x_0$. Відповідно до цього будемо застосовувати апроксимацію нульового порядку $\varphi_a(t) = 0$, $\varphi_v(t) = v_0$ та метод прямокутників для чисельного інтегрування.

Для рівноприскореного руху $a_v(t) = a_0$, $v(t) = \int a(t) dt + v_0$, $x(t) = \int v(t) dt + x_0$, тому будемо застосовувати апроксимацію $\varphi_a(t) = a_0$, $\varphi_v(t) = a_0 t + v_0$ для першого і другого інтегралів відповідно, тобто метод прямокутників та метод трапецій.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Таким чином, програмна реалізація чисельних методів диференціювання та інтегрування дозволяє визначити параметри руху об'єктів вимірювання в комп'ютеризованому приладі, що побудований на основі цифрової відеокамери та акселерометра.

При цьому враховано особливості задачі диференціювання та інтегрування вимірювальних сигналів з метою визначення параметрів руху:

- 1) кількість доданків полінома, що апроксимує поточні відліки вимірювальних сигналів, відповідає степеню апріорної математичної моделі руху технологічного обладнання та виробів, що виготовляються;
- 2) вузли інтерполяційного полінома відповідають за кількістю та моментами часу множині вимірювань значень поточних координат;
- 3) виміряні значення координат та, відповідно, вузли інтерполяції розташовані рівновіддалено на осі відліку часу, оскільки сформована відеопослідовність має фіксований міжкадровий інтервал.

Для визначення параметрів руху в реальному часі використовуються формули чисельного диференціювання назад, для обробки накопичених значень координат – симетричні формули чисельного диференціювання.

Чисельне інтегрування даних від акселерометра для рівномірного руху базуються на апроксимації нульового порядку підінтегральної функції (метод прямокутників). Для рівноприскореного руху доцільно застосовувати формулу прямокутників для отримання швидкості та формулу трапецій (лінійна апроксимація) для отримання поточних координат.

Отримані результати дозволяють підвищити точність вимірювань параметрів руху комп'ютеризованим приладом та забезпечують контроль за технологічним процесом каменедобувних та каменеобробних підприємств.

Список використаної літератури:

1. Проектування каменеобробних підприємств : навч. посібник / С.С. Іськов, В.В. Коробійчук, В.Г. Кравець та інші. – Житомир : ЖДТУ, 2016. – 248 с.
2. Бакка М.Т. Обробка природного каменю / М.Т. Бакка, В.В. Коробійчук, О.А. Зубченко. – Житомир : ЖДТУ, 2006. – 438 с.
3. Мамрай В.В. Обґрунтування технологічних параметрів видобування блочного каменю дисковими машинами : дис. ... канд. техн. наук : 05.15.03 / Мамрай В.В. – Київ, 2020. – 143 с.

4. Обґрунтування оптимальних параметрів відокремлення монолітів природного каменю від масиву алмазно-канатними установками з метою зменшення втрат / *Р.П. Меринов, Н.М. Остафійчук, М.А. Колодій та ін.* // Технічна інженерія. – 2021. – № 1 (87). – С. 149–154. DOI: 10.26642/ten-2021-1(87)-149-154.
5. Devising a method for measuring the motion parameters of industrial equipment in the quarry using adaptive parameters of a video sequence / *Yu.O. Podchashynskiy, O.O. Luhoviykh, V.V. Tsyporenko, V.G. Tsyporenko* // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2021. – Vol. 6 (9 (114)). – P. 32–46 [Electronic resource]. – Access mode : <http://journals.urau.ua/eejet/article/view/2486241>.
6. Подчаши́нський Ю.О. Застосування автоматизованих та інформаційних систем з цифровими зображеннями при відкритій розробці родовищ природного каменю / *Ю.О. Подчаши́нський, В.А. Кирилович, О.О. Лугових* // Технічна інженерія. – 2022. – № 2. – С. 161–169. DOI: 10.26642/ten-2022-2(90)-161-169.
7. Пат. № 140691 Україна, МПК (2020.01) G01B 7/00, G01P 3/36 (2006.01). Пристрій для вимірювання параметрів руху об'єктів / *Подчаши́нський Ю.О., Лугових О.О.* – № u2019 08229 ; заявл. 15.07.2019 ; опубл. 10.03.2020, Бюл. № 5.
8. Павловський М.А. Теоретична механіка : підручник / *М.А. Павловський*. – К. : Техніка, 2002. – 512 с.
9. Комп'ютерне моделювання процесів та систем. Чисельні методи : підручник / *С.П. Вислоух, О.В. Волошко, Г.С. Тимчик, М.В. Філіппова*. – Київ : Вид-во «Політехніка» КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 228 с.
10. Методи та алгоритми комп'ютерних обчислень. Теорія і практика : підручник / *Р.Н. Кветний, Я.В. Іванчук, І.В. Богач та ін.* – Вінниця : ВНТУ, 2023. – 280 с.
11. Подчаши́нський Ю.О. Теорія і принципи побудови приладової системи для вимірювання геометричних параметрів виробів з природного каменю за їх відеозображеннями : дис. ... д-ра техн. наук : 05.11.01 / *Подчаши́нський Ю.О.* – Житомир, 2013. – 520 с.
12. Черепанська І.Ю. Прецизійна приладова система вимірювання кутів : дис. ... д-ра техн. наук : 05.11.01 / *Черепанська І.Ю.* – Київ, 2019. – 433 с.
13. Квасніков В.П. Теорія та принципи побудови трикоординатних інформаційно-вимірювальних систем механічних величин: дис. ... д-ра техн. наук : 05.11.01 / *Квасніков В.П.* – Київ, 2003. – 433 с.
14. Рудик А.В. Наукові основи та принципи побудови приладової системи вимірювання прискорення мобільного робота : дис. ... д-ра техн. наук : 05.11.01 / *Рудик А.В.* – Київ, 2018. – 460 с. Електронний ресурс]. – Режим доступу : https://rada.kpi.ua/files/dissertation/dis_Rudik_A.V.pdf.
15. Коваленко І.О. Метрологія та вимірювальна техніка. Вимірювання неелектричних величин : навч. посібник / *І.О. Коваленко*. – Житомир : ЖДТУ, 2006. – 550 с.
16. Gonzalez R. Digital Image Processing, 4th ed. / *R.Gonzalez, R.Woods*. – Pearson, 2017. – 1192 p.
17. Taylor G. Visual Perception and Robotic Manipulation. 3D Object Recognition, Tracking and Hand-Eye Coordination / *G.Taylor, L.Kleeman* // Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2006. – 230 p.
18. Kehtarnavaz N. Real-Time Image and Video Processing: From Research to Reality / *N.Kehtarnavaz, M.Gamadia*. – Morgan & Claypool, 2006. – 107 p.
19. Фельдман Л.П. Чисельні методи в інформатиці / *Л.П. Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитрієва*. – Київ : Видавнича група БНУ, 2006. – 480 с.
20. Кучерук І.М. Обробка результатів фізичних вимірювань : навч. посібник для пед. ін-тів. / *І.М. Кучерук, В.П. Дуценко, В.М. Андріанов*. – Київ : Вища школа, Головне вид-во, 1981. – 216 с.
21. Безвесільна О.М. Перетворюючі пристрої приладів та комп'ютеризованих систем (Технологічні вимірювання та прилади) : навчальний посібник для студентів приладобудівних спец. ВНЗ / *О.М. Безвесільна, Ю.В. Киричук*. – Житомир : ЖДТУ, 2008. – 172 с.
22. Безвесільна О.М. Вимірювання прискорень : підручник / *О.М. Безвесільна*. – Київ : Либідь, 2001. – 264 с.
23. Добржанський О.О. Інтегруючий гіроскопічний гравіметр авіаційної гравіметричної системи : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.11.01 / *О.О. Добржанський*. – Київ, 2008. – 17 с.
24. Засоби та методи вимірювань неелектричних величин : підручник / *Є.С. Поліщук, М.М. Дорожовець, Б.І. Стадник та ін.* – Львів : Бескид Біт, 2008. – 618 с.
25. Пат. 103422 С2 Україна, МПК (2013.01) G 01 B 7/00. Пристрій для вимірювання параметрів руху об'єктів / *Подчаши́нський Ю.О., Шаповалова О.О. (Лугових О.О.)* ; заявник і власник патенту ЖДТУ. – № a2012 08343 ; заявл. 07.07.12 ; опубл. 10.06.13, Бюл. № 11.

References:

1. Iskov, S.S., Korobiichuk, V.V., Kravets, V.H. et al. (2016), *Proektuvannia kameneobrobnykh pidpriemstv*, navch. posibnyk, ZhDTU, Zhytomyr, P. 248.
2. Bakka, M.T., Korobiichuk, V.V. and Zubchenko, O.A. (2006), *Obrobka pryrodnoho kameniu*, ZhDTU, Zhytomyr, P. 438.
3. Mamrai, V.V. (2020), «Obgruntuvannia tekhnolohichnykh parametriv vydobuvannia blochnoho kameniu dyskovymy mashynamy», Ph.D. Thesis of dissertation, 05.15.03, Kyiv, P. 143.
4. Merynov, R.R., Ostafiichuk, N.M., Kolodii, M.A. et al. (2021), «Obgruntuvannia optymalnykh parametriv vidokremлення монолітів природного каменю від масиву алмазно-канатним установкам з метою зменшення втрат», *Tekhnichna inzheneriia*, No. 1 (87), pp. 149–154, doi: 10.26642/ten-2021-1(87)-149-154.
5. Podchashynskiy, Yu.O., Luhoviykh, O.O., Tsyporenko, V.V. and Tsyporenko, V.G. (2021), «Devising a method for measuring the motion parameters of industrial equipment in the quarry using adaptive parameters of a video sequence», *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, Vol. 6 (9 (114)), pp. 32–46, [Online], available at: <http://journals.urau.ua/eejet/article/view/2486241>

6. Podchashynskyi, Yu.O., Kyrylovych, V.A. and Luhovykh, O.O. (2022), «Zastosuvannia avtomatyzovanykh ta informatsiinykh system z tsyfrovymy zobrazhenniamy pry vidkrytii rozrobttsi rodovyskh pryrodnoho kameniu», *Tekhnichna inzheneriia*, No. 2, pp. 161–169, doi: 10.26642/ten-2022-2(90)-161-169.
7. Podchashynskyi, Yu.O. and Luhovykh, O.O. (2019), *Prystrii dlia vymiriuvannia parametriv rukhu ob'ektiv*, Ukraina, Pat. № 140691, MPK (2020.01) G01B 7/00, G01P 3/36 (2006.01), № u2019 08229, zaivl. 15.07.2019, opubl. 10.03.2020, Biul. No. 5.
8. Pavlovskyi, M.A. (2002), *Teoretychna mekhanika*, pidruchnyk, Tekhnika, K., 512 p.
9. Vysloukh, S.P., Voloshko, O.V., Tymchyk, H.S. and Filippova M.V. (2021), *Kompiuterne modeliuvannia protsesiv ta system. Chyselni metody*, pidruchnyk, Vyd-vo «Politehnika» KPI im. Ihoria Sikorskoho, Kyiv, 228 p.
10. Kvietnyi, R.N., Ivanchuk, Ya.V., Bohach, I.V. et al. (2023), *Metody ta alhorytmy kompiuternykh obchyslen. Teoriia i praktyka*, pidruchnyk, VNTU, Vinnytsia, 280 p.
11. Podchashynskyi, Yu.O. (2013), «Teoriia i pryntsyipy pobudovy pryladovoi systemy dlia vymiriuvannia heometrychnykh parametriv vyrobiv z pryrodnoho kameniu za yikh videozobrazhenniamy», D.Sc. Thesis of dissertation, 05.11.01, Zhytomyr, 520 p.
12. Cherepanska, I.Iu. (2019), «Pretsyzna pryladova systema vymiriuvannia kutiv», D.Sc. Thesis of dissertation, 05.11.01, Kyiv, 433 p.
13. Kvasnikov, V.P. (2003), «Teoriia ta pryntsyipy pobudovy trykoordinatnykh informatsiino-vymiriuvannykh system mekhanichnykh velychyn», D.Sc. Thesis of dissertation, 05.11.01, Kyiv, 433 p.
14. Rudyk, A.V. (2018), «Naukovi osnovy ta pryntsyipy pobudovy pryladovoi systemy vymiriuvannia pryskorennia mobilnoho robota», D.Sc. Thesis of dissertation, 05.11.01, Kyiv, 460 p., [Online], available at: https://rada.kpi.ua/files/dissertation/dis_Rudyk_A.V.pdf
15. Kovalenko, I.O. (2006), *Metrolohiia ta vymiriuvalna tekhnika. Vymiriuvannia neelektrychnykh velychyn*, navch. posibnyk, ZhDTU, Zhytomyr, 550 p.
16. Gonzalez, R. and Woods, R. (2017), *Digital Image Processing*, 4th ed., Pearson, 1192 p.
17. Taylor, G. and Kleeman, L. (2006), *Visual Perception and Robotic Manipulation. 3D Object Recognition, Tracking and Hand-Eye Coordination*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 230 p.
18. Kehtarnavaz, N. and Gamadia, M. (2006), *Real-Time Image and Video Processing: From Research to Reality*, Morgan & Claypool, 107 p.
19. Feldman, L.P., Petrenko, A.I. and Dmytrieva, O.A. (2006), *Chyselni metody v informatytsi*, Vydavnycha hrupa BHV Kyiv, 480 p.
20. Kucheruk, I.M., Dushchenko, V.P. and Andrianov, V.M. (1981), *Obrobka rezultativ fizychnykh vymiriuvan*, navch. posibnyk dlia ped. in-tiv., Vyshcha shkola, Holovne vyd-vo, Kyiv, 216 p.
21. Bezvesilna, O.M. and Kyrychuk, Yu.V. (2008), *Peretvoriuvachi prystroi pryladiv ta kompiuteryzovanykh system (Tekhnolohichni vymiriuvannia ta prylady)*, navchalnyi posibnyk dlia studentiv pryladobudivnykh spets. VNZ, ZhDTU, Zhytomyr, 172 p.
22. Bezvesilna, O.M. (2001), *Vymiriuvannia pryskoren*, pidruchnyk, Lybid, Kyiv, 264 p.
23. Dobrzhashynskyi, O.O. (2008), «Intehruivchi hiroskopichnyi hravimetr aviatsiinoi hravimetrychnoi systemy», Abstract of Ph.D. dissertation, 05.11.01, Kyiv, 17 p.
24. Polishchuk, Ye.S., Dorozhovets, M.M., Stadnyk, B.I. et al. (2008), *Zasoby ta metody vymiriuvan neelektrychnykh velychyn*, pidruchnyk, Beskyd Bit, Lviv, 618 p.
25. Podchashynskyi, Yu.O. and Shapovalova, O.O. (Luhovykh O.O.) (2013), *Prystrii dlia vymiriuvannia parametriv rukhu ob'ektiv*, Ukraina, zaivnyk i vlasnyk patentu ZhDTU, Pat. 103422 C2, MPK (2013.01) G 01 B 7/00, No. a2012 08343, zaivl. 07.07.12, opubl. 10.06.13, Biul. No. 11.

Подчашинський Юрій Олександрович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформаційно-вимірювальних технологій Державного університету «Житомирська політехніка».

<http://orcid.org/0000-0002-8344-6061>.

Наукові інтереси:

- комп'ютеризовані інформаційно-вимірювальні системи;
- цифрова обробка сигналів і відеозображень;
- метрологія, засоби вимірювання;
- системний аналіз складних технічних систем.

Лугових Оксана Олександрівна – старший викладач кафедри інформаційно-вимірювальних технологій Державного університету «Житомирська політехніка».

<http://orcid.org/0000-0001-6138-8991>.

Наукові інтереси:

- комп'ютеризовані інформаційно-вимірювальні системи;
- цифрова обробка відеозображень;
- метрологія, засоби вимірювання.

Podchashynskyi Yu.O., Luhovykh O.O.

Research on the accuracy characteristics of methods for numerical differentiation and integration of measurement signals about motion parameters

The article presents an assessment of the accuracy characteristics of the methods of numerical differentiation and integration used in a computerized device for measuring the parameters of the motion of objects. These are technological equipment and industrial products at quarrying and stone-working enterprises, for which, during the control of the technological process, it is necessary to determine the current coordinates, motion parameters and positioning accuracy. These measurements are based on finding the derivative of the current coordinates measured from video images from a digital video camera, and integrating the acceleration signal from the accelerometer. The article analyzes the relationship of errors with a priori models used to describe the motion of equipment and products. In accordance with this, the methodological errors of the conversion of measuring signals, the errors of determining the motion parameters due to the initial errors of these signals, and the non-ideality of the reproduction of the motion model by the elements of technological equipment are also assessed.

To determine the motion parameters in real time, numerical differentiation formulas are used in reverse, and to process the accumulated coordinate values, symmetric numerical differentiation formulas are used. Numerical integration of data from the accelerometer for uniform motion is based on the approximation of the zeroth order of the integrand function (the method of rectangles). For uniformly accelerated motion, it is advisable to use the rectangle formula to obtain the speed and the trapezoid formula (linear approximation) to obtain the current coordinates.

The results obtained allow increasing the accuracy of measurements of motion parameters by a computerized device, automating the processes of measuring the motion parameters of equipment and industrial products during their manufacture and quality control processes.

Keywords: motion parameters; numerical differentiation; numerical integration; digital video camera; accelerometer; methodological error; a priori motion model.

Стаття надійшла до редакції 03.04.2025.