УДК 004.891
DOI: https://doi.org/10.26642/ten-2019-2(84)-109-114

І.В. Пулеко, к.т.н., доц.
Державний університет «Житомирська політехніка»

Математична модель динаміки рухливих об'єктів на основі кватерніонів

Одним з основних завдань управління групами динамічних рухливих об'єктів є забезпечення їх узгодженого переміщення у просторі. Оптимізацію переміщень (руху) у просторі доцільно проводити з використанням математичних моделей – систем рівнянь руху. Переміщення будь-якого рухливого об'єкта можна подати як сукупність поступального та обертального руху, а швидкість об'єкта – як комбінацію поступальної та обертальної швидкостей. Останнім часом у літературі багато уваги приділяється опису обертального руху кватерніонами, поступальний рух частіше за все моделюють системами диференціальних рівнянь з урахуванням діючих сил та прискорень. За необхідності моделювати узгоджений рух багатьох об'єктів моделі перетворюються у складні і громіздкі системи диференціальних рівнянь, що не завжди можна легко розв'язати. У статті розроблено математичну модель та показано, що за допомогою кватерніонів можна моделювати як обертальний, так і поступальний рух об'єкта. При цьому сам рух подається як перетворення ортогональних базисів, а модель переміщення зводиться до операції множення кватерніонів. Працездатність моделі перевірено на моделюванні руху літальних апаратів.

Ключові слова: *математична модель; кватерніони; ортогональний базис; поступальний рух; обертальний рух.*

Постановка проблеми. На нинішньому етапі розвитку науки і техніки широкого розвитку набувають теорії управління групами рухливих об'єктів [1–9], таких як: роботи, літальні та космічні апарати. Однією з найважливіших функцій для виконання завдань групами рухливих об'єктів є оптимальне переміщення в просторі. Оптимізацію переміщень (руху) у просторі доцільно проводити з використанням математичних моделей – систем рівнянь руху. Переміщення будь-якого рухливого об'єкта можна подати як сукупність поступального та обертального руху, а швидкість об'єкта - як комбінацію поступальної та обертальної швидкостей. Останнім часом у літературі багато уваги приділяється опису обертального руху кватерніонами, поступальний рух частіше за все моделюють системами диференціальних рівнянь з урахуванням діючих сил та прискорень. За необхідності моделювати узгоджений рух багатьох об'єктів моделі перетворюються у складні і громіздкі системи диференціальних рівнянь, що не завжди можна легко розв'язати.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Як теоретичні, так і експериментальні дослідження в області групової робототехніки проводяться досить давно [1, 2]. Також розвитку динамічних та кінематичних моделей руху літальних апаратів у диференціально-матричному вигляді присвячена значна кількість робіт [3–8]. Досить популярним на сьогодні є застосування кватерніонів для опису кінематичного руху [6, 12, 13]. Використанню ж кватерніонів для опису динаміки руху приділялося набагато менше уваги [9]. У той самий час розробка математичних моделей як обертального, так і поступального руху на базі кватерніонів дозволить значно спростити моделювання узгодженого руху груп та дослідження взаємодії між об'єктами управління, тому тема роботи є актуальною.

Мета дослідження – побудувати математичну модель обертального і поступального руху об'єкта на основі багатовимірних числових систем, а саме алгебри кватерніонів. Під об'єктом управління тут будемо розуміти літальний апарат (ЛА), оскільки він може переміщуватися по складній траєкторії у тривимірному просторі, а відповідно отримані моделі можуть досить легко налаштовані на інші види рухливих об'єктів.

Викладення основного матеріалу. Згідно з класичною теорією динаміки [5, 6, 8], будемо розглядати ЛА як «тверде тіло», що являє собою сукупність матеріальних точок жорстко зв'язаних між собою. При русі відстань між точками і центром мас не змінюється і траєкторія ЛА може бути описана як траєкторія руху центра мас.

Рух будь-якого типу ЛА можна подати як сукупність поступального та обертального руху. Тоді швидкість ЛА складається з поступальної та обертальної швидкостей $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$. Як правило кутова швидкість $\vec{\omega}$ виражається через похідні кутів Ейлера, або матриці спрямовуючих косинусів, що зберігаються у системі як параметри моделі руху. Однак таке подання має сингулярність, коли кут тангажу рівний 90°. Фізично це означає, що у цьому випадку кути крену і рискання не відрізняються, а математично – відбувається виродження кінематичних рівнянь, що робить неможливим точний перерахунок координат. Крім того, перетворення координат пов'язане з тригонометричними операціями, що знижує продуктивність обчислень.

Кінематичні рівняння подані у спрямовуючих косинусах є системою дев'яти лінійних скалярних рівнянь, що задовольняють шести зв'язкам, які є умовою ортогональності. Рівняння в кутах Ейлера є системою трьох незалежних лінійних рівнянь, що мають одну особливу точку, в якій система вироджується [9].

Альтернативою визначення положення літального апарата є кватерніонні рівняння, які являють собою систему чотирьох лінійних рівнянь, що не вироджуються та задовольняють одному рівнянню зв’язку. Представлення ортогональних перетворень координат у вигляді добутку кватерніонів дозволяє виконувати моделювання довільного руху з меншими обчислювальними витратами [13, 16, 17].

Кватерніон у загальному вигляді можна подати як впорядковану систему із чотирьох дійсних чисел, або у вигляді скалярної і векторної частини [11]:

$$E = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = e_0 + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = e_0 + \vec{e}, \qquad (1)$$

де $\vec{e}$ - векторна частина кватерніона.

Для опису процесу обертання необхідно, щоб виконувалась умова $\|E\| = 1$, тобто кватерніон був одиничним [14].

Векторну частину одиничного кватерніона $\vec{e}$ можна подати як:

$$\vec{e} = e_1 i^i + e_2 j^i + e_3 k^i , \qquad (2)$$

де $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

Одиничним кватерніоном можна описати одиничний поворот у тривимірному просторі навколо певної осі. Поворот навколо осі на кут Θ, що заданий одиничним вектором ϑ може бути поданий, як:

скалярна частина:

$$e_0 = \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) \qquad (3)$$

векторна частина:

$$\vec{e} = \vartheta \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right). \qquad (4)$$

Введемо інерціальну систему координат $A(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$ (рис. 1, *а*) та зв’язну систему координат $O(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3,)$ у якої початок відліку збігається з центром мас ЛА, вісь $\vec{e}_1$ направлена вздовж вектора швидкості у кожен момент часу моделювання, $\vec{e}_3$ направлена вгору перпендикулярно до $\vec{e}_1$, вісь $\vec{e}_2$ доповнює систему координат до правої.

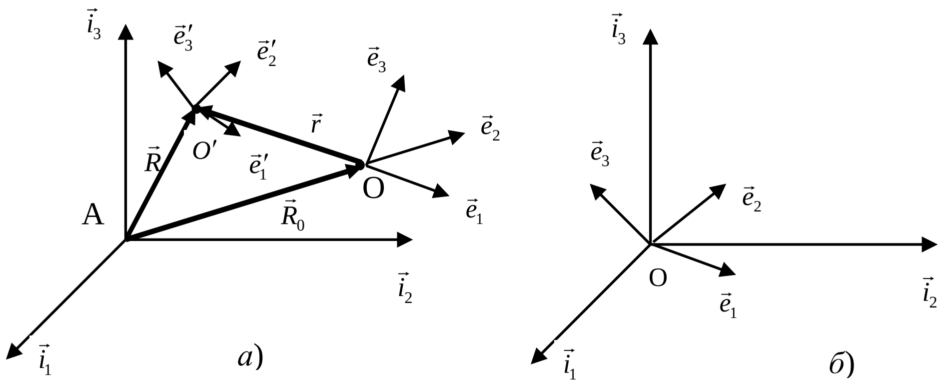

Рис. 1. Подання руху ЛА як перетворення базисів

Введемо додатковий базис $O(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$ (рис. 1, *б*), осі якого паралельні до осей $A(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$, а центр знаходиться у точці O [9, 12]. Тоді рух ЛА визначається рухом точки O (рух кінця вектора $\vec{R}_0$ в точку O'), а кінетичний – поворотом базису $O(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3,)$ відносно $O(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$

Поворот базису можна задати деяким нормованим кватерніоном обертання E :

$$\vec{e}_k = E \circ \vec{i}_k \circ \widetilde{E}, \quad k = 1,2,3, \tag{5}$$

де $E = \lambda_0 + \vec{\lambda}_k$ - деякий нормований кватерніон;

$\widetilde{E}$ – кватерніон, обернений до E, такий що $E \circ \widetilde{E} = 1$.

При цьому кінцеве положення об'єкта може бути подане за формулою:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + E \circ \vec{r}(0) \circ \widetilde{E} \tag{6}$$

Зв'язок між кутами Ейлера та параметрами Родріга-Гамільтона можна визначити, застосовуючи тригонометричне представлення кватерніонів [9]:

Кватерніон повороту на кут прецесії:

$$E_1 = \cos\frac{\psi}{2} + \vec{i}_3 \sin\frac{\psi}{2} = E_1^*. \tag{7}$$

Кватерніон повороту на кут нутації:

$$E_2 = \cos\frac{\theta}{2} + \vec{i}_1^{\,'} \sin\frac{\theta}{2}, \quad E_2^* = \cos\frac{\theta}{2} + \vec{i}_1 \sin\frac{\theta}{2}. \tag{8}$$

Кватерніон повороту на кут власного обертання

$$E_3 = \cos\frac{\varphi}{2} + \vec{i}_3^{\,''} \sin\frac{\varphi}{2}, \quad E_3^* = \cos\frac{\theta}{2} + \vec{i}_3 \sin\frac{\theta}{2} \tag{9}$$

Повний поворот базису можна подати за формулою:

$$E^* = E_1^* \circ E_2^* \circ E_3^*, \tag{10}$$

Тоді параметри Родрига-Гамільтона можна розрахувати за формулами [6]:

$$\begin{aligned}
\lambda_0^* &= \cos\frac{\theta}{2}\,\cos\frac{\psi+\varphi}{2},\\
\lambda_1^* &= \sin\frac{\theta}{2}\,\cos\frac{\psi-\varphi}{2},\\
\lambda_2^* &= \sin\frac{\theta}{2}\,\sin\frac{\psi-\varphi}{2},\\
\lambda_3^* &= \sin\frac{\theta}{2}\,\sin\frac{\psi+\varphi}{2},
\end{aligned} \tag{11}$$

За допомогою цих співвідношень можна визначити вісь обертання та кут кінцевого повороту відносно початкового базису. Кут кінцевого повороту обчислюється як:

$$\alpha = 2\arccos\left(\lambda_0^*\right) = 2\arccos\left[\cos\frac{\theta}{2}\,\cos\frac{\psi+\varphi}{2}\right], \tag{12}$$

Застосовуючи кватерніонне представлення поворотів положення об'єкта у системі $A(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$ можна подати як (рис.1):

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + E \circ \vec{r}^{\,0} \circ \widetilde{E} \tag{13}$$

де

$$\vec{r}^{\,0} = \sum_{k=1}^{3} r_k \vec{i}_k$$

визначає початкове положення об'єкта в базисі $O(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$.

Враховуючи умову для нормованого кватерніона

$$\dot{E} \circ \widetilde{E} = 1, \; \dot{E} \circ \widetilde{E} + E \circ \dot{\widetilde{E}} = 0 \tag{14}$$

отримаємо вектор швидкості ЛА в базисі $A(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_O + \dot{\vec{r}} = \overline{V}_O + \dot{E} \circ \vec{r}^{\,0} \circ \widetilde{E} + E \circ \vec{r}^{\,0} \circ \dot{\widetilde{E}} = \overline{V}_O + \dot{E} \circ \widetilde{E} \circ \vec{r} - \vec{r}^{\,0} \circ + \dot{E} \circ \dot{\widetilde{E}} \tag{15}$$

де $\overline{V}_O$ – швидкість точки О в системі $A(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$

$\dot{E}$ – похідна від кватерніона за часом, яка розраховується як:

$$\dot{E} = \dot{\lambda}_0 + \sum_{k=1}^{3} \dot{\lambda}_k \vec{i}_k \qquad (16)$$

Вектор кутової швидкості об'єкта відносно базису $A(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$

$$\overline{\omega} = 2\left(\dot{E} \circ \tilde{E}\right) \qquad (17)$$

Тому за правилами множення кватерніонів

$$\overline{V} = \overline{V}_O + \overline{\omega} \times \overline{r} \qquad (18)$$

Якщо об'єкт обертається навколо нерухомої осі $\overline{\xi}$ на кут α, то кватерніон повороту, швидкість і вектор кутової швидкості можемо записати як:

$$E = \cos\frac{\alpha}{2} + \overline{\xi}\sin\frac{\alpha}{2},$$
$$\dot{E} = \frac{1}{2}\left(-\sin\frac{\alpha}{2} + \overline{\xi}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\dot{\alpha}, \quad \left(\dot{\overline{\xi}} = 0\right), \qquad (19)$$
$$\overline{\omega} = 2\dot{E} \circ \tilde{E} = \overline{\xi}\dot{\alpha}.$$

Нехай нам відома траєкторія по якій рухається об'єкт. Розділимо її на сегменти, що відповідають проміжкам часу dt (рис. 2). Проведемо інтерполяцію траєкторії кватерніонами. Така інтерполяція називається сферичною лінійною інтерполяцією SLERP (spherical linear interpolation) [10]. В результаті SLERP отримується кватерніон одиничної довжини.

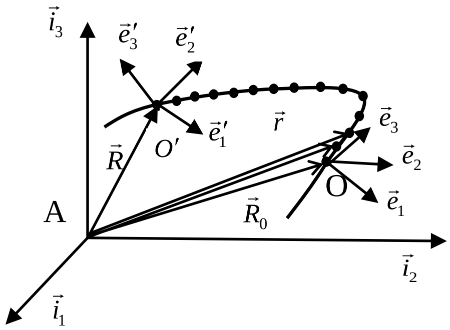

Рис. 2. Моделювання руху як інтерполяція траєкторії

Тому результуюча траєкторія може бути описана добутком кватерніонів

$$E = E_0 \circ E_1 \circ \ldots \circ E_j \circ \ldots \circ E_N, \quad j = 1, 2, \ldots N. \qquad (20)$$

Інтерполяція SLERP досить не проста, і вимагає багато тригонометричних операцій. Однак інші форми подання не менш складні, а подання обертань неприйнятні для лінійної інтерполяції взагалі. Наприклад, інтерполяція компонентів матриці може дати матрицю, яка вироджує об'єкт в площину.

Слід звернути увагу, що кватерніонне множення некомутативне (при зміні порядку співмножників результат кватерніонного множення різний).

Перевірка працездатності моделі проводилася з використанням trial-версії MATLAB R2019b та Free Aerospace Toolbox Trial. При цьому використовувалися об'єкти класу Aero.Animation object. Однак переміщення ЛА по екрану здійснювалося не простим покадровим перерисовуванням об'єкта, а як результат кватерніонного множення кутового чи просторового положення ЛА. Моделювання обертального і поступального руху проводилося як окремо так і разом.

На рисунках 3–4 подано деякі приклади моделювання. При їх створенні автор прагнув показати принципову можливість реалізації моделі, однак просить читачів зважати на те, що досить складно відображати динаміку руху на статичному зображенні.

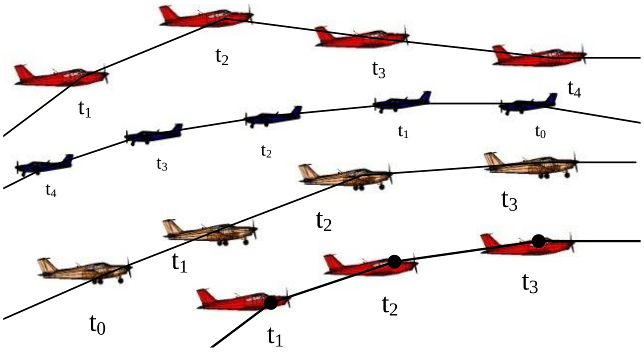

Рис. 3. Приклад копії екрану моделювання поступального руху літаків

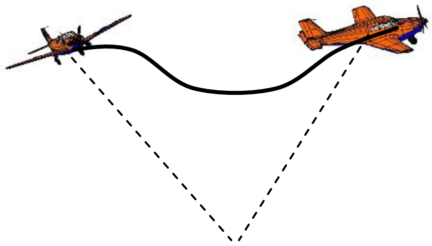

Рис. 4. Приклад копії екрану моделювання руху літаків

Таким чином, проведені експерименти підтвердили працездатність отриманих моделей.

Висновки. На основі отриманих кватерніонних формул (19–20) та формул переходу (7–11) можна моделювати як обертальний, так і поступальний рух ЛА. Такий вид моделей доцільно застосовувати при вивченні процесів управління в групах рухливих об’єктів. Слід враховувати, що кожен вид руху буде моделюватися окремо і поєднуватися вони будуть у кожній точці зміщення.

У подальшому планується для моделювання подібних задач розглянути застосування математичного апарату біквaтеріонів.

Список використаної літератури:

1. *Каляев И.А.* Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов / *И.А. Каляев, А.Р. Гайдук, С.Г. Капустян*. – М. : Физматлит, 2009. – 278 с.
2. *Каляев И.А.* Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов / *И.А Каляев, А.Р. Гайдук, С.Г. Капустян*. – М. : Высшая школа, 2013. – 278 с.
3. *Абросимов В.К.* Групповое движение интеллектуальных летательных аппаратов в антагонистической среде : монография / *В.К. Абросимов*. – М. : Издательский дом «Наука», 2013. – 168 с.
4. Групповое управление подвижными объектами в неопределенных средах / *Д.А. Белоглазов, А.Р. Гайдук, Е.Ю. Косенко* и др. ; под ред. *В.Х. Пшихопова*. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 305 с.
5. Большие технические системы: проектирование и управление / *Л.М. Артюшин, Ю.К. Зиатдинов, И.А. Попов, А.В. Харченко* ; под ред. *И.А. Попова.* – Харьков : Факт, 1997. – 400 с.
6. *Биард Рэндал У.* Малые беспилотные летательные аппараты: теория и практика / *Рэндал У Биард, Тимоти У. МакЛэйн*. – М. : ТЕХНОСФЕРА, 2015. – 312 с.
7. *Пулеко І.В.* Проблеми управління угрупуванням малих безпілотних літальних апаратів з позицій теорії робототехнічних систем / *І.В. Пулеко* / Проблеми створення, випробування, застосування та експлуатації складних інформаційних систем : Збірник наукових праць ЖВІ ДУТ. – Житомир : ЖВІ ДУТ. – 2015. – Вип. 11. – С. 106–114.
8. *Phillips W.F.* Mechanics of Flight / *W.F. Phillips*. – 2nd ed. – New Jersey :Wiley, 2010. – 1152 p.
9. *Цибульська Є.О.* Математичні моделі рухомих об’єктів. Реєстрація, зберігання і обробка даних / *Є.О. Цибульська*. – 2012. – Т. 14, № 2. – С. 25–37.
10. *Гордеев В.Н.* Кватернионы и бикватернионы с приложениями в геометрии и механике / *В.Н. Гордеев.* – К. : Сталь, 2016. – 316 с.
11. *Гамильтон У.Р.* О кватернионах, или о новой системе мнимых величин в алгебре / *У.Р. Гамильтон* // Избранные труды. Оптика. Динамика. Кватернионы. – М. : Наука, 1994. – С. 345–391.
12. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения / *Ю.Н. Челноков*. – М. : Физматлит, 2006. – 512 с.
13. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением / *Ю.Н. Челноков*. – М. : Физматлит, 2011. – 560 с.
14. *Каратаев Е.А.* Преобразования гиперкомплексных чисел / *Е.А. Каратаев*. – М. : Солон-пресс, 2016. – 300 с.

15. *Kuipers J.B.* Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality / *J.B. Kuipers*. – Princeton, NJ : Princeton University Press, 1999.
16. *Побегайло А.П.* Применение кватернионов в компьютерной геометрии и графике / *А.П. Побегайло.* – Минск : БГУ, 2010. – 216 с.
17. *Цисарж В.В.* Математические методы компьютерной графики / *В.В. Цисарж, Р.И. Марусик*. – К. : Факт, 2004. – 464 с.

References:

1. Kalyaev, I.A., Gaiduk, A.R. and Kapustyan, S.G. (2009), *Modeli i algoritmy kollektivnogo upravleniya v gruppakh robotov*, Fizmatlit, M., 278 p.
2. Kalyaev, I.A., Gaiduk, A.R. and Kapustyan, S.G. (2013), *Modeli i algoritmy kollektivnogo upravleniya v gruppakh robotov*, Vysshaya shkola, M., 278 p.
3. Abrosimov, V.K. (2013), *Gruppovoe dvizhenie intellektual'nykh letatel'nykh apparatov v antagonisticheskoi srede*, monografiya, Izdatel'skii dom «Nauka», M., 168 p.
4. Beloglazov, D.A., Gaiduk, A.R., Kosenko, E.Yu. i dr. (2015), *Gruppovoe upravlenie podvizhnymi ob"ektami v neopredelennykh sredakh*, in Pshikhopova, V.Kh. (ed.), FIZMATLIT, M., 305 p.
5. Artyushin, L.M., Ziatdinov, Yu.K., Popov, I.A. and Kharchenko, A.V. (1997), *Bol'shie tekhnicheskie sistemy: proektirovanie i upravlenie*, in Popova, I.A. (ed.), Fakt, Khar'kov, 400 p.
6. Biard, Rendal U. and MakLein, Timoti U. (2015), *Malye bespilotnye letatel'nye apparaty: teoriya i praktika*, M., TEKhNOSFERA, 312 p.
7. Puleko, I.V. (2015), «Problemy upravlinnja ugrupuvannjam malyh bezpilotnyh lital'nyh aparativ z pozycij teorii' robototehnichnyh system», *Problemy stvorennja, vyprobuvannja, zastosuvannja ta ekspluatacii' skladnyh informacijnyh system*, Zbirnyk naukovyh prac' ZhVI DUT, ZhVI DUT, Zhytomyr, Issue 11, pp. 106–114.
8. Phillips, W.F. (2010), *Mechanics of Flight*, 2nd ed, Wiley, New Jersey, 1152 p.
9. Cybul's'ka, Je.O. (2012), *Matematychni modeli ruhomyh ob'jektiv. Rejestracija, zberigannja i obrobka danyh*, T. 14, No. 2, pp. 25–37.
10. Gordeev, V.N. (2016), *Kvaterniony i bikvaterniony s prilozheniyami v geometrii i mekhanike*, Stal', K., 316 p.
11. Gamil'ton, U.R. (1994), «O kvaternionakh, ili o novoi sisteme mnimykh velichin v algebra», *Izbrannye trudy. Optika. Dinamika. Kvaterniony*, Nauka, M., pp. 345–391.
12. Chelnokov, Yu.N. (2006), *Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mekhaniki tverdogo tela i ikh prilozheniya. Geometriya i kinematika dvizheniya*, Fizmatlit, M., 512 p.
13. Chelnokov, Yu.N. (2011), *Kvaternionnye modeli i metody dinamiki, navigatsii i upravleniya dvizheniem*, Fizmatlit, M., 560 p.
14. Karataev, E.A. (2016), *Preobrazovaniya giperkompleksnykh chisel*, Solon-press, M., 300 p.
15. Kuipers, J.B. (1999), *Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality Princeton*, Princeton University Press, NJ,
16. Pobegailo, A.P. (2010), *Primenenie kvaternionov v komp'yuternoi geometrii i grafike*, BGU, Minsk, 216 p.
17. Tsisarzh, V.V. and Marusik, R.I. (2004), *Matematicheskie metody komp'yuternoi grafiki*, Fakt, K., 464 p.

Пулеко Ігор Васильович – кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри інженерії програмного забезпечення Державного університету «Житомирська політехніка».

Наукові інтереси:

– інтелектуальні інформаційні технології;
– моделювання в складних технічних системах;
– технології управління в інтелектуальних технічних системах.

E-mail: pulekoigor@gmail.com.

Стаття надійшла до редакції 02.09.2019.