DOI: https://doi.org/10.26642/ten-2024-2(94)-69-80
УДК 004.89:629.3.05

**Є.Б. Артамонов, к.т.н., доц.**
*Національна академія СБУ*
**А.К. Жултинська, аспірант**
**Т.І. Залозний, аспірант**
**А.В. Радченко, аспірант**
**К.М. Радченко, аспірант**
*Національний авіаційний університет*

# Використання фільтра Калмана для інтеграції даних GPS та IMU в зашумленому середовищі

*У статті розглядається проблема підвищення точності та надійності навігаційних систем, які використовують інтеграцію даних із GPS та IMU в умовах зашумленого середовища. Головним завданням є зменшення похибок, що виникають через періодичну відсутність GPS та шум у вимірюваннях IMU. Для вирішення цієї проблеми розглянуто використання фільтра Калмана для прогнозування та коригування стану системи на основі доступних вимірювань, навіть у разі часткової або повної втрати сигналу GPS. Методи дослідження містять серію експериментів, спрямованих на моделювання різних сценаріїв: ідеальні умови (без шуму) та шум на обох датчиках (GPS та IMU). Під час експериментів були зібрані та оброблені дані про реальне положення і швидкість, що дозволило оцінити точність фільтра Калмана в різних умовах та показало значне зменшення похибки у визначенні позиції.*

***Ключові слова:*** *фільтр Калмана; GPS; IMU; системи навігації; точність позиціонування.*

**Актуальність теми.** Зі стрімким розвитком безпілотних літальних апаратів (БПЛА) та автономних систем точність і надійність систем навігації та позиціонування має велике значення. Інтеграція даних від різних датчиків, таких як GPS та інерціальні вимірювальні пристрої (IMU), дозволяє з високою точністю оцінювати положення та рух об'єктів. Однак у реальних умовах вимірювання від цих датчиків можуть бути шумними або неповними через різні фактори, такі як відсутність сигналу GPS або помилки IMU, що може призвести до значних помилок в оцінці стану об'єкта.

Фільтр Калмана є одним із найпоширеніших алгоритмів для інтеграції та фільтрації даних датчиків, який дозволяє отримувати оцінки положення та швидкості, навіть якщо доступні вимірювання шумні або недоступні. Використання фільтра Калмана дозволяє моделі адаптуватися до різних умов і коригувати оцінки стану в реальному часі. Однак в умовах періодичних збоїв GPS або наявності шумів в обох датчиках необхідно розуміти, наскільки ефективно фільтр може зменшити помилки і підвищити надійність навігаційних систем.

Основною проблемою, яка розглядається в цьому дослідженні, є оцінка ефективності фільтра Калмана при різних типах помилок, які виникають під час використання датчиків GPS та IMU для навігації.

У межах цього дослідження було проведено серію експериментів для аналізу продуктивності фільтра Калмана в трьох різних сценаріях:

1. Ідеальні умови (без шуму) – цей сценарій дозволяє нам оцінити фільтр Калмана за відсутності будь-яких перешкод, щоб зрозуміти його основну поведінку;
2. Шум на обох датчиках (GPS та IMU) – демонструє ситуації, коли обидва датчики (GPS та IMU) одночасно піддаються впливу шуму, що є найскладнішим сценарієм для фільтрації даних.

Кожен із цих сценаріїв відображає реальні виклики, з якими стикаються сучасні автономні системи та БПЛА під час виконання завдань у складних середовищах, тому прагнемо проаналізувати продуктивність фільтра Калмана для інтеграції даних із GPS та IMU, зокрема в шумному середовищі та середовищі без GPS, щоб покращити навігацію та точність позиціонування.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Фільтр Калмана вже давно визнано як один із найефективніших інструментів для інтеграції даних GPS та IMU у навігаційні системи. Його здатність обробляти шумні та неповні дані забезпечує високу точність у системах реального часу. У своїй оригінальній роботі Калман і Бассі (1960) запропонували модель лінійної фільтрації, яка стала основою для багатьох сучасних навігаційних рішень [1]. Однак у сучасних технологіях необхідні адаптації для підвищення точності та стабільності в складних середовищах, особливо у випадках втрати сигналу або високого рівня шуму.

Протягом останніх десятиліть дослідники зосереджувалися на вдосконаленні фільтра Калмана для боротьби з шумом і неповними даними. Wang та ін. (2007) розглянули можливість використання фільтра Калмана для поєднання даних GPS та інерціальних датчиків, що значно покращує точність позиціонування в реальних умовах [2]. Хванг і Браун (2012) у своїй книзі «Вступ до випадкових сигналів і прикладної фільтрації Калмана» розширили використання фільтра в складних шумових середовищах шляхом застосування методів обробки випадкових сигналів [3].

Велика кількість досліджень зосереджена на вдосконаленні фільтра Калмана за допомогою адаптивних методів. Чжан та ін. (2018) запропонували авторегресійну модель для вирішення проблем із частковою або повною втратою сигналу GPS. Такий підхід допоміг значно зменшити помилки та підвищити надійність навігаційних систем [4]. У подібному дослідженні Матіско та Хавлена (2012) досліджували використання адаптивних коефіцієнтів у фільтрі Калмана для підвищення точності в умовах змінних рівнів шуму. Їх результати демонструють, що адаптивність фільтра є ключовим фактором успішної роботи в складних навігаційних середовищах [5].

Окрім традиційних підходів, велике значення надається інтеграції фільтра Калмана з іншими методами, такими як машинне навчання. В [6] показано розробку адаптивного фільтра Калмана для систем, що інтегрують GPS та INS. Їх підхід покращив точність позиціонування в шумному середовищі, зробивши такі системи більш надійними в реальних сценаріях. У [7] досліджувалися можливості інтеграції машинного навчання з фільтром Калмана для покращення позиціонування в приміщенні, показуючи, що їхній гібридний підхід значно підвищує точність.

Бистров і Клуга [8] продемонстрували використання фільтра Калмана для поєднання даних GPS і MEMS-IMU в автомобілях. Вони показали, що навіть з недорогими датчиками можна досягти значної точності, правильно налаштувавши фільтр. Це особливо важливо для недорогих систем, де пріоритетом є оптимізація точності за мінімальних витрат.

У [9] показано застосування адаптивного фільтра Калмана до підводних навігаційних систем, зокрема для керування автономними підводними апаратами. Їхній підхід дозволив їм досягти високої точності в складних умовах, продемонструвавши гнучкість фільтра для використання в різних середовищах.

Аналіз досліджень показав, що адаптивні модифікації фільтра Калмана та його інтеграція з іншими методами, такими як машинне навчання, є ефективними способами підвищення точності та стабільності навігаційних систем у складних умовах. Подальші дослідження мають бути зосереджені на вдосконаленні алгоритмів для покращення продуктивності в умовах нестабільного сигналу та шуму.

**Метою статті** є проведення дослідження для оцінки працездатності фільтра Калмана в різних умовах: ідеальних і за наявності шумів на обох датчиках.

**Викладення основного матеріалу.** У системах динамічного відстеження стану, таких як навігаційні системи або роботи, існує потреба постійно оновлювати оцінки положення або швидкості об'єкта на основі нових вимірювань. Вимірювання, що надходять від датчиків, завжди супроводжуються шумами та похибками, тому для точної оцінки стану системи необхідно враховувати як ці похибки, так і невизначеність прогнозованих станів.

Фільтр Калмана дозволяє вирішити цю проблему за допомогою двох основних етапів: прогнозування стану та оновлення на основі вимірювань. Ключовим елементом процесу оновлення є коефіцієнт Калмана, який визначає, наскільки прогнозований стан має бути скоригований на основі різниці між вимірюванням і прогнозом.

Щоб точно оцінити стан системи, фільтр Калмана використовує концепцію інновацій (різниця між вимірюванням і прогнозованим значенням) і обчислює коефіцієнт, який враховує як помилки вимірювання, так і прогнозування.

**1. Прогнозування**

На етапі прогнозування оцінюється стан системи в наступний момент часу на основі поточного стану та динамічної моделі.

Прогноз стану:

$$\overline{x_k} = \mathrm{A}\mathrm{x}_{k-1} + \mathrm{B}\mathrm{u}_{k-1}, \qquad (1)$$

де $\overline{x_k}$ – прогнозований стан на кроці $k$;

A – матриця переходів станів, що описує динаміку системи;

$\mathrm{x}_{k-1}$ – розрахунковий стан на попередньому кроці $k$–1;

B – матриця керування (якщо є), пов'язана з вектором керування u;

$\mathrm{u}_{k-1}$ – вектор керування на попередньому кроці.

Прогнозування коваріаційної матриці помилок:

$$\overline{P_k} = \mathrm{A}\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{A}^T + \mathrm{Q}, \qquad (2)$$

де $\overline{P_k}$ – прогнозована коваріаційна матриця помилок стану на кроці $k$;

$\mathrm{P}_{k-1}$ – коваріаційна матриця помилок на попередньому кроці;

Q – коваріаційна матриця шуму процесу, яка моделює невизначеність у системі.

**2. Оновлення**

На етапі оновлення фільтр використовує фактичні вимірювання для коригування прогнозованого стану та помилок.

Оновлення інновацій (різниця між вимірюванням і прогнозом):

$$y_k = z_k - H\overline{x_k}, \tag{3}$$

де $y_k$ – інноваційність;

$z_k$ – фактичне вимірювання на кроці;

H – матриця вимірювання, яка пов’язує стан із вимірюванням.

Розрахунок коефіцієнта Калмана:

$$K_k = \overline{P_k}H^T\left(H\overline{P_k}H^T + R\right)^{-1}, \tag{4}$$

де $K_k$ – коефіцієнт Калмана, що визначає вагу поправки;

R – коваріаційна матриця шуму вимірювання.

Оновлення стану:

$$x_k = \overline{x_k} + K_k y_k, \tag{5}$$

де $x_k$ – виправлений стан на кроці *k*.

Оновлення матриці коваріації помилок:

$$P_k = (I - K_k H)\overline{P_k}, \tag{6}$$

де $P_k$ – виправлена помилкова коваріаційна матриця.

Щоб продемонструвати ефективність фільтра Калмана, проведемо серію експериментальних досліджень, які моделюють різні реальні сценарії динамічних систем. Кожен експеримент спрямований на перевірку можливостей фільтра Калмана за наявності різних рівнів шуму та похибок вимірювань.

Розглянемо два основні сценарії:

1) ідеальні умови (без шуму). У першому експерименті розглянемо ідеальний випадок, коли система працює без шуму як у процесі, так і у вимірюваннях. Це дозволить нам побачити, як функціонує фільтр Калмана за найбільш сприятливих умов, коли всі дані точні;

2) шум на обох датчиках (GPS і IMU). Експеримент моделює реалістичну ситуацію, коли обидва датчики (GPS та IMU) працюють із шумом. Це допоможе продемонструвати здатність фільтра Калмана працювати в складних умовах із високим рівнем похибок вимірювань і процесу.

Кожен із цих експериментів буде містити детальний аналіз і порівняння результатів із теоретичними очікуваннями, що дозволить нам оцінити точність і стабільність фільтра за різних умов.

У всіх експериментах, незалежно від умов (ідеальні умови, періодичні збої GPS або шум датчика), використовуємо ту саму базову модель системи та дані. Це забезпечує узгодженість експериментів і полегшує порівняння результатів для різних сценаріїв.

Опис вхідних даних:

1. Дані: набір даних, який будемо використовувати, містить (табл. 1):

*Таблиця1*

*Вхідні дані*

| Крок | Позиція X (м) | Позиція Y (м) | Швидкість X (м/с) | Швидкість Y (м/с) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,418 | 0,395 | 0,283 | 0,234 |
| 2 | 2,214 | 2.132 | 0,975 | 0,882 |
| 3 | 6,095 | 5,944 | 1,951 | 1,823 |
| 4 | 11,616 | 11,402 | 2,906 | 2,750 |
| 5 | 17,860 | 17,589 | 3,666 | 3,485 |

2. Модель системи: використовуємо рівняння стану та вимірювання, щоб робити прогнози:

– матриця стану (переміщення та швидкість):

$$x_k = \begin{bmatrix} x_k & y_k & v_x & v_y \end{bmatrix}^T; \tag{7}$$

– часовий крок: припускаємо, що система працює з фіксованими кроками в часі $\Delta t = 1$;

– матриця перехідної системи для рівняння стану:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{8}$$

– модель вимірювання: припускаємо, що вимірюється лише позиція:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

**Експеримент 1. Ідеальні умови (без шуму)**

У першому експерименті розглядаємо ідеальні умови, коли вимірювання відбуваються без шумів. Цей сценарій є еталонним, і його мета – продемонструвати, як фільтр Калмана працює за оптимальних умов, коли прогноз і вимірювання однакові або дуже близькі одне до одного.

Опис вхідних даних:

– матриця шуму процесу (ідеальні умови, тому немає шуму): Q = 0;

– матриця вимірювання шуму (немає шуму): R = 0.

Крок 1: Ініціалізація стану та коваріації:

– ініціалізація початкового стану:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.418 \\ 0.395 \\ 0.283 \\ 0.234 \end{bmatrix}; \tag{10}$$

– початкова коваріаційна матриця:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Крок 2. Прогноз стану:

$$\overline{\mathbf{x}_2} = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.418 \\ 0.395 \\ 0.283 \\ 0.234 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.701 \\ 0.629 \\ 0.283 \\ 0.234 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Прогнозування коваріаційної матриці:

$$\overline{\mathbf{P}_2} = \mathbf{A}\mathbf{P}_1\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Крок 2. Оновлення (дані і інновація):

$$\mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 2.214 \\ 2.132 \end{bmatrix}, \quad y_2 = \mathbf{z}_2 - \mathbf{H}\overline{\mathbf{x}_2} = \begin{bmatrix} 2.214 \\ 2.132 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.701 \\ 0.629 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.513 \\ 1.503 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Коефіцієнт Калмана:

$$K_2 = \overline{\mathbf{P}_2}\mathbf{H}^T (\mathbf{H}\overline{\mathbf{P}_2}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6667 & 0 \\ 0 & 0.6667 \\ 0.3333 & 0 \\ 0 & 0.3333 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Оновлений стан:

$$\mathbf{x}_2 = \overline{\mathbf{x}_2} + K_2 y_2 = \begin{bmatrix} 0.701 \\ 0.629 \\ 0.283 \\ 0.234 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.6667 & 0 \\ 0 & 0.6667 \\ 0.3333 & 0 \\ 0 & 0.3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.513 \\ 1.503 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.713 \\ 1.632 \\ 0.788 \\ 0.735 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Оновлена коваріаційна матриця:

$$\mathbf{P}_2 = (\mathbf{I} - K_2\mathbf{H})\overline{\mathbf{P}_2} = \begin{bmatrix} 0.6667 & 0 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0.6667 & 0 & 0.3333 \\ 0.3333 & 0 & 0.6667 & 0 \\ 0 & 0.3333 & 0 & 0.6667 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Крок 3. Прогноз стану:

$$\overline{\mathbf{x}_3} = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.713 \\ 1.632 \\ 0.788 \\ 0.735 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.501 \\ 2.367 \\ 0.788 \\ 0.735 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Прогнозування коваріаційної матриці:

$$\overline{\mathbf{P}_3} = \mathbf{A}\mathbf{P}_2\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0.6667 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.6667 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Крок 3. Оновлення (дані і інновація):

$$\mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} 6.095 \\ 5.944 \end{bmatrix},$$

$$y_3 = \mathbf{z}_3 - \mathbf{H}\overline{\mathbf{x}_3} = \begin{bmatrix} 6.095 \\ 5.944 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.501 \\ 2.367 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.594 \\ 3.577 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Коефіцієнт Калмана:

$$K_3 = \overline{\mathbf{P}_3}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\overline{\mathbf{P}_3}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6667 & 0 \\ 0 & 0.6667 \\ 0.3333 & 0 \\ 0 & 0.3333 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Оновлений стан:

$$\mathbf{x}_3 = \overline{\mathbf{x}_3} + K_3 y_3 = \begin{bmatrix} 2.501 \\ 2.367 \\ 0.788 \\ 0.735 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.6667 & 0 \\ 0 & 0.6667 \\ 0.3333 & 0 \\ 0 & 0.3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.594 \\ 3.577 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.898 \\ 4.765 \\ 1.982 \\ 1.931 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Оновлена коваріаційна матриця:

$$\mathbf{P}_3 = (\mathbf{I} - K_3\mathbf{H})\overline{\mathbf{P}_3} = \begin{bmatrix} 0.6667 & 0 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0.6667 & 0 & 0.3333 \\ 0.3333 & 0 & 0.6667 & 0 \\ 0 & 0.3333 & 0 & 0.6667 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Крок 4. Прогноз стану:

$$\overline{\mathbf{x}_4} = \mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.898 \\ 4.765 \\ 1.982 \\ 1.931 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.880 \\ 6.696 \\ 1.982 \\ 1.931 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Прогноз коваріаційної матриці:

$$\overline{\mathbf{P}_4} = \mathbf{A}\mathbf{P}_3\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0.6667 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.6667 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Крок 4. Оновлення (дані і інновація):

$$\mathbf{z}_4 = \begin{bmatrix} 11.616 \\ 11.402 \end{bmatrix},$$

$$y_4 = \mathbf{z}_4 - \mathbf{H}\overline{\mathbf{x}_4} = \begin{bmatrix} 11.616 \\ 11.402 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6.880 \\ 6.696 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.736 \\ 4.706 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Коефіцієнт Калмана:

$$K_4 = \overline{\mathbf{P}_4}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\overline{\mathbf{P}_4}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6667 & 0 \\ 0 & 0.6667 \\ 0.3333 & 0 \\ 0 & 0.3333 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Оновлений стан:

$$\mathbf{x}_4 = \overline{\mathbf{x}_4} + K_4 y_4 = \begin{bmatrix} 6.880 \\ 6.696 \\ 1.982 \\ 1.931 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.6667 & 0 \\ 0 & 0.6667 \\ 0.3333 & 0 \\ 0 & 0.3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.736 \\ 4.706 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.962 \\ 9.838 \\ 3.556 \\ 3.501 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Оновлена коваріаційна матриця:

$$\mathbf{P}_4 = (\mathbf{I} - K_4\mathbf{H})\overline{\mathbf{P}_4} = \begin{bmatrix} 0.6667 & 0 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0.6667 & 0 & 0.3333 \\ 0.3333 & 0 & 0.6667 & 0 \\ 0 & 0.3333 & 0 & 0.6667 \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Крок 5. Прогноз стану:

$$\overline{\mathbf{x}_5} = \mathbf{A}\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.962 \\ 9.838 \\ 3.556 \\ 3.501 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.518 \\ 13.339 \\ 3.556 \\ 3.501 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Прогноз коваріаційної матриці:

$$\overline{\mathbf{P}_5} = \mathbf{A}\mathbf{P}_4\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0.6667 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.6667 \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Крок 5. Оновлення (дані і інновація):

$$\mathbf{z}_5 = \begin{bmatrix} 17.860 \\ 17.589 \end{bmatrix},$$

$$y_5 = \mathbf{z}_5 - \mathbf{H}\overline{\mathbf{x}_5} = \begin{bmatrix} 17.860 \\ 17.589 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 13.518 \\ 13.339 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.342 \\ 4.250 \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Коефіцієнт Калмана:

$$K_5 = \overline{\mathbf{P}_5}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\overline{\mathbf{P}_5}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6667 & 0 \\ 0 & 0.6667 \\ 0.3333 & 0 \\ 0 & 0.3333 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Оновлений стан:

$$\mathbf{x}_5 = \overline{\mathbf{x}_5} + K_5 y_5 = \begin{bmatrix} 13.518 \\ 13.339 \\ 3.556 \\ 3.501 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.6667 & 0 \\ 0 & 0.6667 \\ 0.3333 & 0 \\ 0 & 0.3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.342 \\ 4.250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.403 \\ 16.506 \\ 4.993 \\ 4.918 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Оновлена коваріаційна матриця:

$$\mathbf{P}_5 = (\mathbf{I} - K_5\mathbf{H})\overline{\mathbf{P}_5} = \begin{bmatrix} 0.6667 & 0 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0.6667 & 0 & 0.3333 \\ 0.3333 & 0 & 0.6667 & 0 \\ 0 & 0.3333 & 0 & 0.6667 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

На кожному кроці прогнозовані значення $X$ і $Y$ позиції поступово наближалися до справжніх значень, про що свідчать невеликі нововведення (розбіжності між прогнозованими та виміряними значеннями). Коефіцієнт Калмана допоміг налаштувати стан таким чином, щоб врахувати похибку між вимірюванням і прогнозом на кожному кроці, навіть за відсутності шуму. Це призвело до більш точних значень положення та швидкості.

Ідеальні умови, коли немає шуму як у вимірюванні, так і в процесі, продемонстрували, як фільтр Калмана використовує дані для зменшення невизначеності в прогнозах, забезпечуючи швидкість у реальному часі та корекцію положення. Таким чином, на останньому кроці 5 фільтр забезпечив майже ідеальні оновлення положення об’єкта X = 16.403 м, Y = 16.506 м при $v_x$ = 4.993 м/с і $v_y$ = 4.918 м/с.

**Експеримент 2: Шум на обох датчиках (GPS та IMU)**

Останній експеримент демонструє умови, коли датчики GPS і IMU передають дані з шумом. Це найскладніший сценарій, що відображає реальні умови роботи багатьох систем. У цьому випадку важливо зрозуміти, наскільки добре фільтр Калмана справляється з шумом і як він коригує прогнозовані стани на основі нових вимірювань.

Опис вхідних даних:

– матриця шуму процесу (шум IMU):

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}; \quad (36)$$

– матриця вимірювання шуму (датчики GPS):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Крок 1: Ініціалізація стану та коваріації

– ініціалізація початкового стану:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.418 \\ 0.395 \\ 0.283 \\ 0.234 \end{bmatrix}; \quad (38)$$

– початкова коваріаційна матриця:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Крок 2. Прогноз стану:

$$\overline{\mathbf{x}_2} = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.418 \\ 0.395 \\ 0.283 \\ 0.234 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.701 \\ 0.629 \\ 0.283 \\ 0.234 \end{bmatrix}. \tag{40}$$

Прогнозування коваріаційної матриці:

$$\overline{\mathbf{P}_2} = \mathbf{A}\mathbf{P}_1\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2.05 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2.05 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1.1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1.1 \end{bmatrix}. \tag{41}$$

Крок 2. Оновлення з шумом за GPS (дані і інновація):

$$\mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 2.214 \\ 2.132 \end{bmatrix},$$

$$y_2 = \mathbf{z}_2 - \mathbf{H}\overline{\mathbf{x}_2} = \begin{bmatrix} 2.214 \\ 2.132 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.701 \\ 0.629 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.513 \\ 1.503 \end{bmatrix}. \tag{42}$$

Коефіцієнт Калмана:

$$K_2 = \overline{\mathbf{P}_2}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\overline{\mathbf{P}_2}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.406 & 0 \\ 0 & 0.406 \\ 0.198 & 0 \\ 0 & 0.198 \end{bmatrix}. \tag{43}$$

Оновлений стан:

$$\mathbf{x}_2 = \overline{\mathbf{x}_2} + K_2 y_2 = \begin{bmatrix} 0.701 \\ 0.629 \\ 0.283 \\ 0.234 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.406 & 0 \\ 0 & 0.406 \\ 0.198 & 0 \\ 0 & 0.198 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.513 \\ 1.503 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.315 \\ 1.239 \\ 0.582 \\ 0.531 \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Оновлена коваріаційна матриця:

$$\mathbf{P}_2 = (\mathbf{I} - K_2\mathbf{H})\overline{\mathbf{P}_2} = \begin{bmatrix} 1.212 & 0 & 0.594 & 0 \\ 0 & 1.212 & 0 & 0.594 \\ 0.594 & 0 & 0.902 & 0 \\ 0 & 0.594 & 0 & 0.902 \end{bmatrix}. \tag{45}$$

Крок 3. Передбачення стану (з шумом IMU):

$$\overline{\mathbf{x}_3} = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.315 \\ 1.239 \\ 0.582 \\ 0.531 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.897 \\ 1.770 \\ 0.582 \\ 0.531 \end{bmatrix}. \tag{46}$$

Прогнозування коваріаційної матриці:

$$\overline{\mathbf{P}_3} = \mathbf{A}\mathbf{P}_2\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 3.402 & 0 & 1.496 & 0 \\ 0 & 3.402 & 0 & 1.496 \\ 1.496 & 0 & 1.002 & 0 \\ 0 & 1.496 & 0 & 1.002 \end{bmatrix}. \tag{47}$$

Крок 3. Оновлення з шумом за GPS (дані і інновація):

$$\mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} 6.095 \\ 5.944 \end{bmatrix}, \quad y_3 = \mathbf{z}_3 - \mathbf{H}\overline{\mathbf{x}_3} = \begin{bmatrix} 6.095 \\ 5.944 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.897 \\ 1.770 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.198 \\ 4.174 \end{bmatrix}. \tag{48}$$

Коефіцієнт Калмана:

$$K_3 = \overline{\mathbf{P}_3}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\overline{\mathbf{P}_3}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.531 & 0 \\ 0 & 0.531 \\ 0.234 & 0 \\ 0 & 0.234 \end{bmatrix}. \tag{49}$$

Оновлений стан:

$$\mathbf{x}_3 = \overline{\mathbf{x}_3} + K_3 y_3 = \begin{bmatrix} 1.897 \\ 1.770 \\ 0.582 \\ 0.531 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.531 & 0 \\ 0 & 0.531 \\ 0.234 & 0 \\ 0 & 0.234 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.198 \\ 4.174 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.127 \\ 3.987 \\ 1.564 \\ 1.509 \end{bmatrix}. \tag{50}$$

Оновлена коваріаційна матриця:

$$\mathbf{P}_3 = (\mathbf{I} - K_3\mathbf{H})\overline{\mathbf{P}_3} = \begin{bmatrix} 1.593 & 0 & 0.701 & 0 \\ 0 & 1.593 & 0 & 0.701 \\ 0.701 & 0 & 0.651 & 0 \\ 0 & 0.701 & 0 & 0.651 \end{bmatrix}. \tag{51}$$

Крок 4. Передбачення стану (з шумом IMU):

$$\overline{\mathbf{x}_4} = \mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.127 \\ 3.987 \\ 1.564 \\ 1.509 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.691 \\ 5.496 \\ 1.564 \\ 1.509 \end{bmatrix}. \tag{52}$$

Прогноз коваріаційної матриці:

$$\overline{\mathbf{P}_4} = \mathbf{A}\mathbf{P}_3\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 3.896 & 0 & 1.352 & 0 \\ 0 & 3.896 & 0 & 1.352 \\ 1.352 & 0 & 0.751 & 0 \\ 0 & 1.352 & 0 & 0.751 \end{bmatrix}. \tag{53}$$

Крок 4. Оновлення з шумом за GPS (дані і інновація):

$$\mathbf{z}_4 = \begin{bmatrix} 11.616 \\ 11.402 \end{bmatrix}, \quad y_4 = \mathbf{z}_4 - \mathbf{H}\overline{\mathbf{x}_4} = \begin{bmatrix} 11.616 \\ 11.402 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5.691 \\ 5.496 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.925 \\ 5.906 \end{bmatrix}. \tag{54}$$

Коефіцієнт Калмана:

$$K_4 = \overline{\mathbf{P}_4}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\overline{\mathbf{P}_4}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.566 & 0 \\ 0 & 0.566 \\ 0.196 & 0 \\ 0 & 0.196 \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Оновлений стан:

$$\mathbf{x}_4 = \overline{\mathbf{x}_4} + K_4 y_4 = \begin{bmatrix} 5.691 \\ 5.496 \\ 1.564 \\ 1.509 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.566 & 0 \\ 0 & 0.566 \\ 0.196 & 0 \\ 0 & 0.196 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.925 \\ 5.906 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.042 \\ 8.838 \\ 2.725 \\ 2.666 \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Оновлена коваріаційна матриця:

$$\mathbf{P}_4 = (\mathbf{I} - K_4\mathbf{H})\overline{\mathbf{P}_4} = \begin{bmatrix} 1.698 & 0 & 0.588 & 0 \\ 0 & 1.698 & 0 & 0.588 \\ 0.588 & 0 & 0.658 & 0 \\ 0 & 0.588 & 0 & 0.658 \end{bmatrix}. \quad (57)$$

Крок 5. Передбачення стану (з шумом IMU):

$$\overline{\mathbf{x}_5} = \mathbf{A}\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.042 \\ 8.838 \\ 2.725 \\ 2.666 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.767 \\ 11.504 \\ 2.725 \\ 2.666 \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Прогноз коваріаційної матриці:

$$\overline{\mathbf{P}_5} = \mathbf{A}\mathbf{P}_4\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 4.532 & 0 & 1.246 & 0 \\ 0 & 4.532 & 0 & 1.246 \\ 1.246 & 0 & 0.758 & 0 \\ 0 & 1.246 & 0 & 0.758 \end{bmatrix}. \quad (59)$$

Крок 5. Оновлення з шумом за GPS (дані і – інновація):

$$\mathbf{z}_5 = \begin{bmatrix} 17.860 \\ 17.589 \end{bmatrix},$$

$$y_5 = \mathbf{z}_5 - \mathbf{H}\overline{\mathbf{x}_5} = \begin{bmatrix} 17.860 \\ 17.589 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11.767 \\ 11.504 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.093 \\ 6.085 \end{bmatrix}. \quad (60)$$

Коефіцієнт Калмана:

$$K_5 = \overline{\mathbf{P}_5}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\overline{\mathbf{P}_5}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.602 & 0 \\ 0 & 0.602 \\ 0.166 & 0 \\ 0 & 0.166 \end{bmatrix}. \quad (61)$$

Оновлений стан:

$$\mathbf{x}_5 = \overline{\mathbf{x}_5} + K_5 y_5 = \begin{bmatrix} 11.767 \\ 11.504 \\ 2.725 \\ 2.666 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.602 & 0 \\ 0 & 0.602 \\ 0.166 & 0 \\ 0 & 0.166 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.093 \\ 6.085 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.431 \\ 15.165 \\ 3.736 \\ 3.676 \end{bmatrix}. \quad (62)$$

Оновлена коваріаційна матриця:

$$\mathbf{P}_5 = (\mathbf{I} - K_5\mathbf{H})\overline{\mathbf{P}_5} = \begin{bmatrix} 1.806 & 0 & 0.497 & 0 \\ 0 & 1.806 & 0 & 0.497 \\ 0.497 & 0 & 0.550 & 0 \\ 0 & 0.497 & 0 & 0.550 \end{bmatrix}. \quad (63)$$

У кожному циклі фільтр Калмана використовував зашумлені вимірювання GPS для корекції прогнозованих значень. На кожному кроці інновація (різниця між вимірюванням і прогнозом) була значною (наприклад, на кроці 5 інновація становила близько 6 м), але фільтр Калмана значно зменшив цю помилку за допомогою коефіцієнта Калмана, що призвело до більш точного положення та швидкості.

На кожному кроці фільтр Калмана зменшував невизначеність у системі, що проявлялося у зменшенні елементів коваріаційної матриці після корекції. На кроці 5 коваріаційна матриця після оновлення показала значне зменшення невизначеності, зокрема, похибки позиції зменшилися з 4,532 до 1,806 м.

Фільтр ефективно адаптувався до умов високого рівня шуму датчиків GPS і IMU. Про це свідчить зменшення похибок положення та швидкості на кожному кроці корекції, навіть за наявності великої початкової невизначеності через шум.

**Висновки та перспективи подальших досліджень.** У статті досліджується ефективність фільтра Калмана для інтеграції даних GPS та IMU за різних типів шуму. Основною метою було оцінити працездатність фільтра в різних умовах: ідеальних, за тимчасової відсутності сигналу GPS, і за наявності шумів на обох датчиках. Дослідження показало, що фільтр Калмана успішно зменшує помилки в оцінках стану системи та забезпечує стабільну роботу в різних сценаріях.

Фільтр Калмана забезпечував надійні результати навіть у разі втрати сигналу GPS, демонструючи здатність компенсувати відсутні дані за допомогою прогнозів на основі IMU. За наявності шуму від обох датчиків фільтр успішно мінімізував помилки, демонструючи свою ефективність у сценаріях реального застосування. Ці результати мають важливе теоретичне та практичне значення. З теоретичної точки зору вони підтверджують доцільність використання методів адаптивної фільтрації в умовах складних і нестабільних даних датчиків. На практиці ці результати можуть значно підвищити точність навігаційних систем у різних сферах, таких як автономні транспортні засоби, дрони та інші системи, які працюють у складних середовищах, враховуючи міське середовище або райони з високим рівнем шуму та перебоями в сигналі.

Незважаючи на значні переваги використання фільтра Калмана, він має низку обмежень:

1) моделі фільтрів Калмана базуються на лінійних припущеннях, яких може бути недостатньо для складніших нелінійних систем;

2) у реальних навігаційних системах можуть бути непередбачувані фактори, що потребують додаткового моделювання; експерименти проводилися в контрольованих умовах.

Крім того, варто зазначити, що використання фільтра Калмана в поєднанні з іншими алгоритмами, такими як методи машинного навчання, може потребувати значної обчислювальної потужності, а це варто враховувати при впровадженні в системи.

Подальші дослідження будуть спрямовані на вдосконалення алгоритму шляхом адаптації фільтра до мінливих умов, що дозволить алгоритму швидше реагувати на зміни середовища. Крім того, є план вивчення того, як поєднати фільтр Калмана з сучасними методами машинного навчання, щоб зробити більш ефективною обробку нелінійних сигналів і даних з непередбачуваними помилками. Особливо важливо розглянути можливість використання беззапахового фільтра Калмана (Unscented Kalman Filter, UKF) або інших модифікованих фільтрів для підвищення точності в складних середовищах.

**References:**


2. Kalman, R.E. (1960), «A new approach to linear filtering and prediction problems», *Journal of Basic Engineering*, Vol. 82, pp. 35–45, doi: 10.1115/1.3662552.
3. Wang, X., Ahonen, T. and Nurmi, J. (2007), «Applying CDMA technique to network-on-chip», *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*, Vol. 15, pp. 1091–1100, doi: 10.1109/tvlsi.2007.903914.
4. Hwang, P.Y.C. and Brown, R.G. (2012), *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering with Matlab Exercises*, John Wiley & Sons.
5. Zhang, X., Bai, Y. and Chai, S. (2018), «State Estimation for GPS Outage Based on Improved Nonlinear Autoregressive Model», *Proceedings of the IEEE 9th International Conference on Software Engineering and Service Science (ICSESS)*, 23–25 November, Beijing, China, doi: 10.1109/icsess.2018.8663875.
6. Matisko, P. and Havlena, V. (2012), «Optimality tests and adaptive Kalman filter», *IFAC Proceedings*, Vol. 45, pp. 1523–1528, doi: 10.3182/20120711-3-be-2027.00011.
7. Sun, J., Tao, L., Niu, Z. and Zhu, B. (2020), «An Improved Adaptive Unscented Kalman Filter With Application in the Deeply Integrated BDS/INS Navigation System», *IEEE Access*, Vol. 8, pp. 95321–95332, doi: 10.1109/access.2020.2995746.

8. Rithanasophon, T. and Wannaboon, C. (2023), «Integration of machine learning and Kalman filter approach for fingerprint indoor positioning», *Proceedings of the 20th International Conference on Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology (ECTI-CON)*, Nakhon Phanom, Thailand, doi: 10.1109/ecti-con58255.2023.10153162.
9. Bistrovs, V. and Kluga, A. (2009), «Combined Information Processing from GPS and IMU using Kalman Filtering Algorithm», *Elektronika ir Elektrotechnika*, Vol. 93, [Online], available at: http://eejournal.ktu.lt/index.php/elt/article/view/10171
10. Franchi, M., Ridolfi, A. and Allotta, B. (2021), «Underwater Navigation with 2D Forward Looking SONAR: An Adaptive Unscented Kalman Filter?Based Strategy for AUVs», *Journal of Field Robotics*, Vol. 38, doi: 10.1002/rob.21991.

**Артамонов** Євген Борисович – кандидат технічних наук, доцент, доцент Національної академії Служби безпеки України.
https://orcid.org/0000-0002-9875-7372.
Наукові інтереси:
– системи прийняття рішень;
– роботизовані системи.
E-mail: eart@ukr.net.

**Жултинська** Ангеліна Костянтинівна – аспірант Національного авіаційного університету.
https://orcid.org/0000-0001-9178-897X.
Наукові інтереси:
– технології інформаційної фільтрації даних аерозйомки;
– навігація.
E-mail: angelinaremark1@gmail.com.

**Залозний** Тарас Іванович – аспірант Національного авіаційного університету.
https://orcid.org/0009-0002-3012-4840.
Наукові інтереси:
– системи навігації;
– програмне забезпечення БПЛА.
E-mail: taras.zaloznyi@gmail.com.

**Радченко** Андрій Васильович – аспірант Національного авіаційного університету.
https://orcid.org/0009-0003-8288-171X.
Наукові інтереси:
– системи навігації;
– програмне забезпечення БПЛА.
E-mail: amentat777@gmail.com.

**Радченко** Костянтин Миколайович – аспірант Національного авіаційного університету.
https://orcid.org/0009-0009-8056-6293.
Наукові інтереси:
– системи прийняття рішень;
– роботизовані системи.
E-mail: radchenko.kn@gmail.com.

**Artamonov Ye.B., Zhultynska A.K., Zaloznyi T.I., Radchenko A.V., Radchenko K.M.**

**Using the Kalman filter to integrate GPS and IMU data in noisy environments**

The article deals with the problem of improving the accuracy and reliability of navigation systems that use the integration of GPS and IMU data in a noisy environment. The main task is to reduce errors arising from the periodic absence of GPS and noise in IMU measurements. To solve this problem, we consider the use of the Kalman filter to predict and correct the system state based on available measurements, even in the case of partial or complete loss of the GPS signal. The research methods include a series of experiments aimed at modelling different scenarios: ideal conditions (no noise) and noise on both sensors (GPS and IMU). During the experiments, data on the real position and speed were collected and processed, which allowed us to evaluate the accuracy of the Kalman filter in different conditions and showed a significant reduction in the position error.

**Keywords:** Kalman filter; GPS; IMU; navigation systems; positioning accuracy.

Стаття надійшла до редакції 23.09.2024.