

Б.А. Шелудченко, к.т.н., проф.
В.Р. Білецький, к.т.н., доц.
В.М. Боровський, ст. викладач
О.Б. Плужніков, асистент
Ю.В. Тростенюк, асистент
Поліський національний університет

Узагальнення досліджень формозміни еквіпотенціальних поверхонь напружено-деформованих об'єктів

Переважає більшість аналітичних досліджень напружено-деформованого стану різноманітних об'єктів технічних систем, виконуваних на етапі їх розробки і проектування, свідчить про те, що експлуатаційні характеристики цих технічних об'єктів визначаються геометричними параметрами їх формозміни значно більшою мірою, ніж параметрами їх напруженого стану. На підставі аналізу численних аналітичних та експериментальних досліджень різних технічних об'єктів, що складаються з трансверсально-ізотропних та ізотропних середовищ, запропоновано графо-аналітичну модель-аналог динаміки формозміни контурів еквіпотенціальних поверхонь та плоских перерізів zdeформованих технічних об'єктів у вигляді ділянки овалу Кассіні з трьома характерними точками перегину. Розглянуто можливість практичного моделювання формозміни контурів поверхонь zdeформованих об'єктів на прикладах динаміки деформування пневматичної оболонки периферії колісного рушія мобільної колісної техніки та поширеного деформування поперечного профілю ґрунту еластичним колісним рушієм мобільного засобу. Оцінка розробленої графоаналітичної моделі-аналогу динаміки формозміни контурів поверхонь та плоских перерізів технічних об'єктів свідчить, що усереднений рівень довірчої ймовірності до такої моделі у зіставленні з оцінкою міри деформації за критеріями Генкі та Свейнгера становить 86,8 %.

Ключові слова: напружено-деформований стан; динаміка формозміни; еквіпотенціальна поверхня; модель; лемніската; овал Кассіні.

Актуальність теми. Переважає більшість показників, які визначають надійність функціонування та експлуатаційну якість технічних систем, прямо або опосередковано визначаються характером формозміни (деформування) кожного зі спряжених елементів технічної системи, які або безпосередньо перебувають у контакті, або контактують у процесі експлуатації системи один з одним. Як наслідок, для покращення зазначених показників, на етапі розроблення та проектування переважної більшості технічних систем, мають бути використані надійні, з високою довірчою ймовірністю результати дослідження динаміки геометричних ознак мікро- та макроформозміни окремих складових цих систем.

Отже, розроблення універсальних ефективних аналітичних та графоаналітичних методик моделювання динаміки деформування елементів технічних систем є актуальною задачею, розв'язання якої дозволяє на стадії проектування технічних систем не лише керувати параметрами їх функціонування, але і суттєво покращити їх експлуатаційні властивості та ресурс їх роботи.

Аналіз останніх досліджень та публікацій, на які спираються автори. Переважно під час робочого контактування двох або більшої кількості матеріальних об'єктів змінюється форма (деформування) в результаті їх взаємодії. Зміна форми контактуючих тіл є наслідком напружено-деформованого стану, який виникає в зоні контакту і може бути описаний в загальному випадку в будь-якій точці ізотропного тіла шістьма компонентами напруженого стану (σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , σ_{12} , σ_{23} , σ_{31}) та шістьма компонентами деформованого стану (ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} , ε_{12} , ε_{23} , ε_{31}), де відповідно σ_{ij} та ε_{ij} – напруження та деформації повних тензорів напружень та деформацій зазначеного ізотропного тіла [1, 2, 7, 8]. При цьому кожний з компонентів напруженого стану залежить від усіх шести компонентів деформації, що може бути представленим як [6, 9]:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = f_{11}(\varepsilon_{11}) \\ \sigma_{22} = f_{22}(\varepsilon_{22}) \\ \sigma_{33} = f_{33}(\varepsilon_{33}) \\ \sigma_{12} = f_{12}(\varepsilon_{12}) \\ \sigma_{23} = f_{23}(\varepsilon_{23}) \\ \sigma_{31} = f_{31}(\varepsilon_{31}) \end{cases} \quad (1)$$

При цьому:

$$\sigma_{kl} = f_{kl}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}) \equiv f_{kl}(\varepsilon_{ij}), \quad (2)$$

де

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{kl} = \sigma_{lk} \\ \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \end{array} \right\}. \quad (3)$$

Встановлено, що з точки зору стабілізації експлуатаційних властивостей матеріальних об'єктів деформований стан є значно небезпечнішим за напружений стан у будь-якій точці zdeформованого тіла [7, 9]. Про це засвідчують більшість використовуваних в наш час критеріїв міцності. Насамперед це загальноприйняті широковідомі критерії, які покладено в основу класичних теорій міцності [1, 7, 10]:

- критерій найбільших лінійних деформацій (друга (II) теорія міцності), в якій за критерій обирається найбільша за абсолютним значенням лінійна деформація;
- критерій питомої потенційної енергії деформації (четверта (IV) теорія міцності), як критерій міцності в цьому випадку обирають кількість питомої потенційної енергії формозміни, яку накопичено zdeформованим об'єктом. Згідно з цим критерієм пластична деформація матеріалу (текучість) виникає тоді, коли питома потенційна енергія формозміни досягне свого критичного значення.

Для прогнозування характеру пластичної деформації поблизу ділянок з інтенсивно змінюваною формою використовують критерій Треска – Сен-Венана, який у поєднанні з критерієм Губера – Мізеса – Генкі становить умову виникнення граничного zdeформованого стану. Справедливість цих критеріїв деформування підтверджується усталеністю (стабільністю) інтенсивності дотичних напружень для будь-яких фіксованих значень деформацій у зонах рівномірної формозміни (до початку пластичної деформації або утворення шийки).

У наш час запропоновано також і цілий ряд інших критеріїв текучості та еластичності (формозміни), які дещо відрізняються від зазначених вище критеріїв. Однак для практичного використання ці критерії є досить складними. Зокрема, в стаціонарних процесах формозмінювання виконується усереднення точок поля швидкостей формозмінюваної зони, після чого визначають величину «емпіричної сталої формозмінювання». В цілому можна стверджувати, що критерій Губера – Мізеса – Генкі є прийнятним для аналізу пластичних та «еластичних» конструкцій та конструкційних матеріалів, а критерій Треска – Сен-Венана більш придатний для дослідження крихких матеріалів. Для матеріалів з внутрішнім тертям розроблено такі деформаційні критерії, як критерій Кулона – Мора та критерій Друкера – Прагера, що засновані на визначенні опору переміщення окремих частинок матеріалу або конструкції в процесі деформації.

Якщо визначати деформацію як зміну розмірів та форми деякого тіла під дією зовнішніх сил (навантажень) або дією деяких інших впливів (температури, електричних та магнітних полів тощо), то в процесі деформування відбувається зміна розташування точок поверхні цього тіла. Довільна точка поверхні zdeформованого тіла з радіус-вектором r набуває нового розташування, яке описується новим радіус-вектором r' , тобто здійснюється переміщення $u = r' - r$. Сукупність точок zdeформованої поверхні тіла утворює «поле переміщень» як визначальну характеристику формозміни zdeформованого тіла [5]. Однак «поле переміщень» не є зручним для виконання математичного аналізу з огляду на мінливість його градієнтів. Саме тому для аналітичного описування формозміни zdeформованого тіла застосовують тензор деформацій [3, 8]:

$$T_d = \left\{ \begin{array}{ccc} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{array} \right\}. \quad (4)$$

Якщо розглядати ε_{ij} як складові деформації за трьома ортогональними площинками в певній точці zdeформованого тіла, то стає очевидним, що дослідження формозміни еквіпотенціальних поверхонь напружено-деформованих об'єктів доцільно виконувати шляхом аналізу двомірних графічних моделей-аналогів контурів цих zdeформованих об'єктів [4, 10]. Саме тому подальший розвиток графо-аналітичних досліджень та поглиблення методик аналізу графічних моделей-аналогів контурів zdeформованих об'єктів є надзвичайно важливим завданням підвищення рівнів надійності та оптимізації експлуатаційних характеристик як окремих технічних об'єктів, так і технічних систем та споруд в цілому.

Метою роботи є стабілізація та підвищення рівнів надійності експлуатаційних характеристик технічних об'єктів, динаміка яких визначається складним напружено-деформованим станом, на стадії розроблення і проектування цих об'єктів.

Для досягнення поставленої мети було узагальнено візуалізовані результати дослідження динаміки формозміни широкого спектра технічних об'єктів, які характеризуються трансверсально-ізотропними та ізотропними властивостями матеріалу, з якого вони виготовлені.

Таким чином, узагальненим об'єктом дослідження є процеси формозміни еквіпотенціальних поверхонь деформованих об'єктів у полях сил та напружень трансверсально-ізотропних та ізотропних середовищ.

На підставі проведеного аналізу зазначених досліджень *вперше розроблено* універсальну графо-аналітичну модель-аналог динаміки деформування контурів поверхонь та формозміни плоских перерізів здеформованих технічних об'єктів.

Матеріали та методи досліджень. Об'ємний напружено-деформований стан анізотропного матеріалу визначається такими лінійними залежностями між деформаціями та напруженнями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} + C_{14}\varepsilon_{23} + C_{15}\varepsilon_{31} + C_{16}\varepsilon_{12} \\ \sigma_{22} &= C_{21}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{23}\varepsilon_{33} + C_{24}\varepsilon_{23} + C_{25}\varepsilon_{31} + C_{26}\varepsilon_{12} \\ \sigma_{33} &= C_{31}\varepsilon_{11} + C_{32}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33} + C_{34}\varepsilon_{23} + C_{35}\varepsilon_{31} + C_{36}\varepsilon_{12} \\ \sigma_{23} &= C_{41}\varepsilon_{11} + C_{42}\varepsilon_{22} + C_{43}\varepsilon_{33} + C_{44}\varepsilon_{23} + C_{45}\varepsilon_{31} + C_{46}\varepsilon_{12} \\ \sigma_{31} &= C_{51}\varepsilon_{11} + C_{52}\varepsilon_{22} + C_{53}\varepsilon_{33} + C_{54}\varepsilon_{23} + C_{55}\varepsilon_{31} + C_{56}\varepsilon_{12} \\ \sigma_{12} &= C_{61}\varepsilon_{11} + C_{62}\varepsilon_{22} + C_{63}\varepsilon_{33} + C_{64}\varepsilon_{23} + C_{65}\varepsilon_{31} + C_{66}\varepsilon_{12} \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

або

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}. \quad (6)$$

Таким чином, анізотропне здеформоване тіло характеризується 36 сталими C_{ijkl} . Однак, якщо вважати $C_{ijkl} = C_{klij}$, то в (5) залишається лише 21 незалежна стала, а для ортотропного середовища кількість незалежних сталих скорочується до дев'яти. Якщо ж властивості матеріалу (середовища) відрізняються лише у двох перпендикулярних напрямках (трансверсально-ізотропне середовище), то деформація такого середовища характеризується вже лише п'ятьма незалежними сталими C_{11} , C_{33} , C_{44} , C_{66} , та C_{13} . І врешті-решт у випадку ізотропного середовища залишається лише два незалежні коефіцієнти C_{11} та C_{12} :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{12}\varepsilon_{33} \\ \sigma_{22} &= C_{12}\varepsilon_{11} + C_{11}\varepsilon_{22} + C_{12}\varepsilon_{33} \\ \sigma_{33} &= C_{12}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{11}\varepsilon_{33} \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

При цьому:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{23} &= C_{44}\varepsilon_{23} \\ \sigma_{31} &= C_{44}\varepsilon_{31} \\ \sigma_{12} &= C_{44}\varepsilon_{12} \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

а C_{44} є функцією C_{11} та C_{12} :

$$C_{44} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}). \quad (9)$$

А отже, (7–9) визначають доцільність і достатність застосування аналізу двомірних графічних моделей-аналогів для дослідження формозміни контурів еквіпотенціальних поверхонь деформованих ізотропних об'єктів. А за умови орієнтації плоских перерізів досліджуваних об'єктів у напрямку «головних площинок» тензора деформацій двомірні графічні моделі аналоги можуть бути застосованими і для дослідження трансверсально-ізотропних середовищ.

Очевидно, що контур еквіпотенціальної поверхні досліджуваного здеформованого об'єкта визначається як ортодоксальний переріз скалярного поля градієнтів цієї поверхні і є довільною кривою, а отже може бути змодельований наближенням послідовності деякої лемніскати (рис. 1), яка є плоскою алгебраїчною кривою порядку $2 \cdot n$ і для якої добуток відстаней від кожної точки кривої до фіксованої кількості n точок, які є фокусами, сталий.

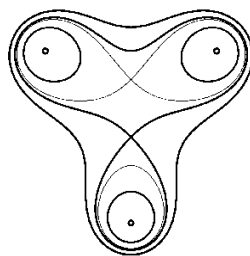


Рис. 1. Лемніската з трьома фіксованими фокусами


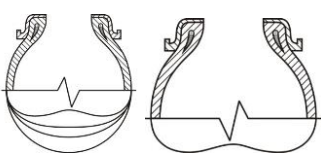
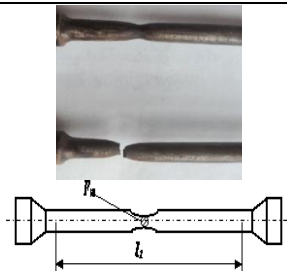

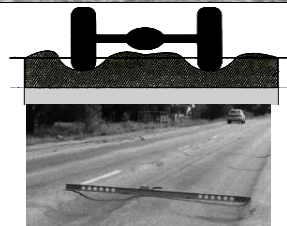
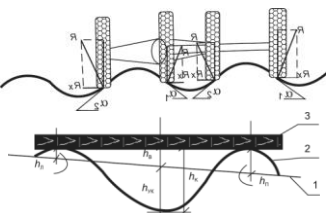
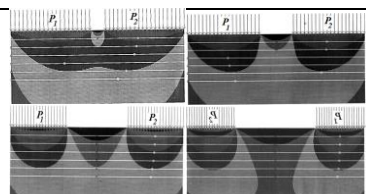
Таким чином, як методична база узагальнення графоаналітичних досліджень еквіпотенціальних поверхонь напружено-деформованих об'єктів технічних систем можуть бути застосовані класичні методи

аналітичної геометрії, що полягають у дослідженні алгебраїчних рівнянь кривих порядку $2 \cdot n$, які і визначають контури формозмінених поверхонь цих об'єктів під дією сил або механічних напружень.

Результати та обговорення. В таблиці 1 наведено результати узагальнення попередніх ексклюзивних напрацювань з дослідження формозміни контурів еквіпотенціальних поверхонь деформованих ізотропних та трансверсально-ізотропних середовищ та об'єктів.

Таблиця 1

Візуалізація результатів експериментів та характеристика застосовуваних методів, умов та об'єктів деформування

Візуалізація результатів експерименту	Коротка характеристика дослідження	Методика отримання результату	Характеристика деформованого об'єкта	Рік виконання експерименту
	Пошарове дослідження деформації ґрунтового профілю в колії під колісним рушієм мобільного засобу сільськогосподарської техніки	Графоаналітичне дослідження	Трансверсально-ізотропне середовище	2021
	Дослідження деформації пневматичної оболонки (шини) колісного рушія мобільного транспортного засобу	Графоаналітичне дослідження	Еластична оболонка з еквіпотенціальною поверхнею рівного тиску	2020
	Випробування зразка з маловуглецевої сталі на розтягування	Фізико-механічний експеримент	Ізотропний конструкційний матеріал	1993
	Випробування вантажного ланцюга (стропа) на розрив	Фізико-механічний експеримент	Ланка тороподібного профілю з ізотропного матеріалу	1997
	Дослідження залишкових деформацій автодорожніх покриттів під дією колісних рушіїв транспортних засобів	Натурне профілювання та графічна побудова	Поверхня трансверсально-ізотропного середовища	2016
	Дослідження залишкових деформацій автодорожніх покриттів при складній взаємодії колісних рушіїв транспортних засобів	Графоаналітичне дослідження	Поверхня трансверсально-ізотропного середовища	2017
	Дослідження полів розподілення деформацій двома рознесеними блоками розподілених навантажень	Числовий експеримент	Трансверсально-ізотропне середовище	1999

Візуалізація формозміни поверхонь досліджуваних об'єктів та їх різноорієнтованих перерізів, які механічно здеформовані в процесі експлуатації цих об'єктів, свідчить про відповідність їх контурів деякій лемніскаці з двома фокусами. Тоді порядок цих алгебраїчних кривих визначається як $2 \cdot n = 4$, де n кількість фокусів, а саме:

– лемніскаца Бута (рис. 2), що має місце при дослідженні багатопарового здеформованого середовища і яка описується як:

$$(x^2 + y^2)^2 - (2m^2 + c)x^2 + (2m^2 - c)y^2. \quad (10)$$

і при $c = 0$ лемніскаца Бута вироджується в лемніскацу Бернуллі;

– лемніскаца Бернуллі (рис. 3), яку можна використовувати як графічну модель здеформованої поверхні і яка описується як:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2m^2(x^2 - y^2). \quad (11)$$

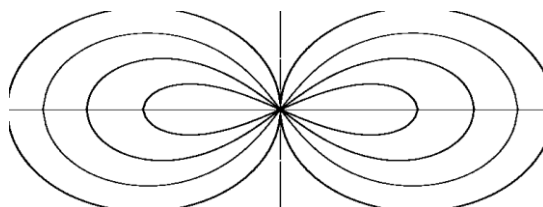


Рис. 2. Лемніскаца Бута

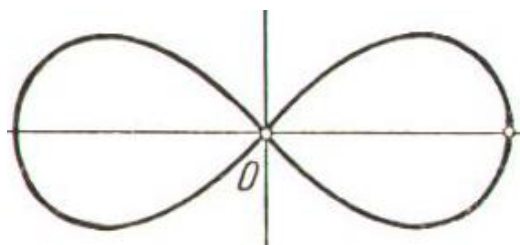


Рис. 3. Лемніскаца Бернуллі

Окремим випадком узагальнення розглянутих вище лемніскац є алгебраїчна замкнена крива 4-го порядку, яка є геометричним місцем точок, добуток відстаней від яких до двох заданих точок фокусів є усталеним (постійним) і дорівнює квадрату деякого числа a (рис. 4). Зазначена алгебраїчна крива отримала назву овалу Кассіні і описується рівнянням:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2 \cdot c^2 \cdot (x^2 - y^2) = a^4 - c^4. \quad (12)$$

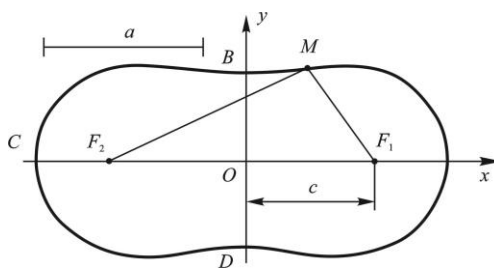


Рис. 4. До визначення овалу Кассіні

У наведеному рівнянні (12) містяться два незалежні параметри: c – половина відстані між фокусами F_i та a – добуток відстаней від обох фокусів до будь-якої точки кривої (овалу Кассіні). З точки зору варіативності окреслення овалу Кассіні найсуттєвішим є співвідношення цих параметрів, а не їх абсолютні величини. Відповідно, за цим співвідношенням $\frac{c}{a}$, розрізняється шість найхарактерніших варіантів окреслення овалу Кассіні:

– $\frac{c}{a} = \infty$ ($a = 0$; $c \neq 0$) – алгебраїчна крива овалу Кассіні вироджується до двох точок, які співпадають з фокусами F_1 та F_2 ;

– $1 < \frac{c}{a} < \infty$ ($0 < a < c$) – крива овалу Кассіні розпадається на два окремо окреслених навколо F_1 та F_2 овали і витягнутих в бік іншого з фокусів, які за профілем контуру нагадують обриси двох яєць, що сторонами з більш гострим профілем орієнтовані в напрямку спільного центра;

- $\frac{c}{a} = 1$ ($a = c$) – крива овалу Кассіні перетворюється на лемніскату Бернуллі (рис. 3);
- $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{c}{a} < 1$ ($c < a < c \cdot \sqrt{2}$) – у алгебраїчної кривої овалу Кассіні з’являється чотири симетричних точки перегину;
- $0 < \frac{c}{a} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($a \geq c \cdot \sqrt{2}$) – крива овалу Кассіні перетворюється на опуклу замкнену криву (овал);
- $\frac{c}{a} = 0$ ($a \neq 0; c = 0$) – крива овалу Кассіні перетворюється на коло з радіусом a .

Основні найхарактерніші варіанти окреслення овалу Кассіні, які використовувалися для створення графічних моделей-аналогів контурів формозміни поверхонь zdeформованих об’єктів, наведено на рисунку 5.

Розглянемо можливість практичного моделювання формозміни контурів поверхонь zdeформованих об’єктів на прикладі динаміки деформування пневматичної оболонки периферії колісного рушія мобільної колісної техніки, яка в загальному випадку характеризується як еластична оболонка з еквіпотенціальною поверхнею рівного тиску. З точки зору дослідження динаміки формозміни такої оболонки, яка перебуває під певним тиском і механічно zdeформована в процесі експлуатації, найприйнятнішим варіантом співвідношення $\frac{c}{a}$ є варіант, що описується як $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{c}{a} < 1$ ($c < a < c \cdot \sqrt{2}$). В цьому випадку крива овалу Кассіні має чотири точки перетину з полярними координатами:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[4]{\frac{a^4 - c^4}{3}} \\ \cos 2\varphi = -\sqrt{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a^4}{c^4} - 1\right)} \end{cases} \quad (13)$$

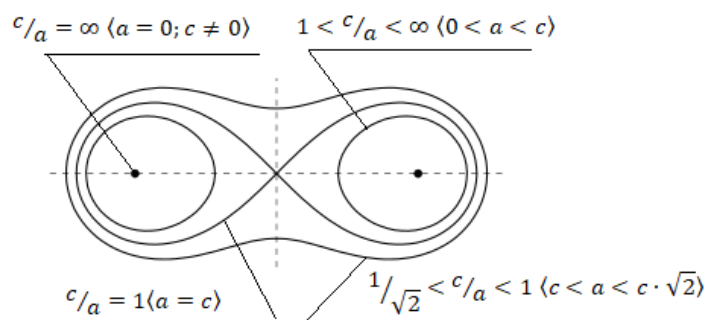


Рис. 5. Найхарактерніші варіанти окреслення овалу Кассіні

Результат поетапного графоаналітичного моделювання, ділянкою кривої овалу Кассіні, динаміки формозміни еластичної пневмооболонки рушія мобільного засобу з кроком моделювання $\Delta\left\{\frac{a}{c}\right\} = 0,2$ наведено на рисунку 6.

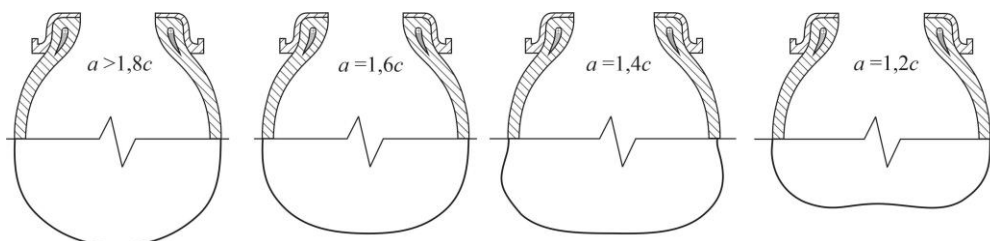


Рис. 6. Поетапне моделювання динаміки деформування еластичної пневмооболонки рушія мобільного засобу, ділянкою кривої овалу Кассіні, яка описується параметрами

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{c}{a} < 1 \quad (c < a < c \cdot \sqrt{2})$$

Аналогічно викладеному вище, реалізовано графоаналітичну модель суміщеного з еластичною пневматичною оболонкою zdeформованого півпростору ґрунту (трансверсально-ізотропне середовище). Візуалізований результат моделювання наведено на рисунку 7 (крок моделювання $\Delta \left\{ \frac{a}{c} \right\} = 0,1$).

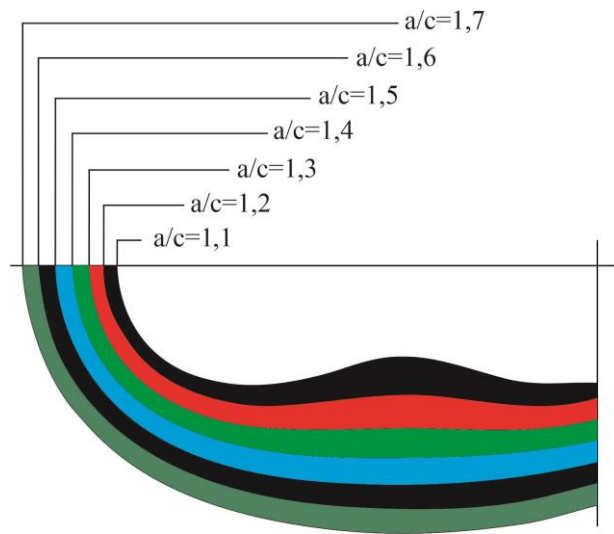


Рис. 7. Графічна модель пошарового деформування поперечного профілю ґрунту еластичним колісним рушієм мобільного засобу

Для оцінювання рівня довірчої ймовірності результатів графоаналітичного моделювання обчислювався параметр Δ_Φ як модельна міра деформації об'єкта:

$$\Delta_\Phi = \frac{\left(\frac{a}{c_n}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{-1} - \left(\frac{a}{c_{n+1}}\right) \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^{-1}}{\left(\frac{a}{c_n}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{-1}}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (14)$$

де n – порядковий номер шару (кроку моделювання) графоаналітичної моделі.

Результати визначення параметра Δ_Φ як модельної міри деформації модельованого трансверсально-ізотропного середовища (ґрунт) порівнювались із значеннями міри деформації за Генкі та Свейнгером (табл. 2).

Таблиця 2
Оцінювання рівня довірчої ймовірності результатів графоаналітичного моделювання трансверсально-ізотропного середовища

Параметр, $\left(\frac{a}{c}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{-1}$	1	0,455	0,208	0,089	0,039	0,018	0,008	
Міра деформації моделі, Δ_Φ	–	0,545	0,543	0,572	0,562	0,539	0,566	
Міра деформації за Генкі	0,66							
Міра деформації за Свейнгером	0,50							
Рівень адекватності результатів моделювання, %	за Генкі	–	82,6	82,3	86,7	85,2	82,7	84,2
	за Свейнгером	–	91,0	91,4	85,6	87,6	92,2	89,8

За результатами оцінювання довірчих меж застосування пропонує графоаналітичних моделей динаміки формозміни контурів поверхонь та плоских перерізів zdeформованих об'єктів встановлено, що усереднений рівень довірчої ймовірності цих моделей до міри деформації за критеріями Генкі та Свейнгера становить 86,8 %. При цьому найнижчий рівень довірчої ймовірності моделі – 82,3 % було зафіксовано для приповерхневого шару деформації за критерієм міри деформації Генкі, а найвищий рівень довірчої ймовірності – 92,2 % – для шару віддаленого від поверхні zdeформованого об'єкта за критерієм міри деформації Свейнгера.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Встановлено, що стабільність експлуатаційних характеристик технічних об'єктів, які утворено трансверсально-ізотропними та ізотропними

середовищами і динаміка яких визначається їх складним напружено-деформованим станом, залежить від геометричних параметрів їх формозміни значно більшою мірою, ніж від параметрів напруженого стану цих об'єктів. При цьому вперше встановлено, що геометричний контур та контури поперечних перерізів здеформованих об'єктів визначені ділянками замкнених кривих 4-го порядку з двома фокусами, які в загальному вигляді є відповідними лемніскастами.

Вперше запропоновано, що найприйнятнішою лемніскастою для описання динаміки формозміни контурів екіпотенціальних поверхонь та плоских перерізів трансверсально-ізотропного або ізотропного середовищ здеформованих технічних об'єктів є ділянка овалу Кассіні з трьома характерними точками перегину. На підставі аналізу характерних геометричних ознак овалу Кассіні розроблено універсальну графоаналітичну модель-аналог динаміки деформування контурів поверхонь та формозміни плоских перерізів технічних об'єктів.

За результатами оцінювання розробленої графоаналітичної моделі-аналогу динаміки формозміни контурів поверхонь та плоских перерізів трансверсально-ізотропних та ізотропних середовищ технічних об'єктів визначено, що рівень довірчої ймовірності до таких моделей порівняно з оцінкою міри деформації за Генкі та Свейнгером становить не менше за 82,3 %.

Список використаної літератури:

1. Максим'юк Ю.В. Индиферентність тензорів деформацій, напружень та їх прирощень за умови енергетичної сполученості / Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 99. – С. 151–159.
2. Шелудченко Б.А. Механіка контактного руйнування автомобільних доріг / Б.А. Шелудченко, Л.С. Шелудченко. – Кам'янець-Подільський : ТОВ «Каліграф», 2016. – 66 с.
3. Graphic analytical optimization of design and operating parameters of tires for drive wheels of agricultural machinery / B.Sheludchenko, E.Šarauskis, S.Kukharets, A.Zabrodskyi // ScienceDirect. – 2022. – Vol. 215. DOI: 10.1016/j.still.2021.105227.
4. Сяський А.О. Механіка суцільного середовища : навчальний посібник / А.О. Сяський, С.М. Бабич. – Рівне : Ред.-видав. Відділ РДГУ, 2007. – 150 с.
5. Михайлевич В.М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень / В.М. Михайлевич. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 1998. – 195 с.
6. Троценко В. Розсіяне і локалізоване втомне пошкодження металів і сплавів / В.Троценко, Л.Хамза // Вісник ТНТУ. – Тернопіль : ТНТУ, 2014. – Т. 76, № 4. – С. 7–21. DOI: 10.33108/visnyk_tntu.
7. Wang J.Y. Mechanical properties and atomistic deformation mechanism of γ -Y2Si2O7 from first-principles investigations / J.Y. Wang, Y.C. Zhou, Z.J. Lin. – 2007.
8. The equation of state of wadsleyite solid solutions: constraining the effects of anisotropy and crystal chemistry / J.Buchen, H.Marquardt, T.B. Ballaran and other // Am Miner. – 2017. – № 102 (12). – P. 2494–2504.
9. Determination of the full elastic tensor of single crystals using shear wave velocities by Brillouin spectroscopy / D.Fan, Z.Mao, J.Yang, J.F. Lin // Am Miner. – 2015. – № 100 (11–12). – P. 2590–2601.
10. Jiang F. Single-crystal elasticity of grossular-and almandine-rich garnets to 11 GPa by Brillouin scattering / F.Jiang, S.Speziale, T.S. Duffy // J Geophys Res Sol Earth. – 2004. – № 109:B10.

References:

1. Maksymiuk, Yu.V. (2017), «Indyferentnist tenzoriv deformatsii, napruzhen ta yikh pryroshchen za umovy enerhetychnoi spoluchenosti», *Opir materialiv i teoriia sporud*, Issue 99, pp. 151–159.
2. Sheludchenko, B.A. and Sheludchenko, L.S. (2016), *Mekhanika kontaktneho ruinuvannia avtomobilnykh dorih*, TOV «Kaligraf», Kamianets-Podilskyi, 66 p.
3. Sheludchenko, B., Šarauskis, E., Kukharets, S. and Zabrodskyi, A. (2022), «Graphic analytical optimization of design and operating parameters of tires for drive wheels of agricultural machinery», *ScienceDirect*, Vol. 215, doi: 10.1016/j.still.2021.105227.
4. Siaskyi, A.O. and Babych, S.M. (2007), *Mekhanika sutsilnoho seredovyshcha*, navchalnyi posibnyk, Red.-vydav. Viddil RDHU, Rivne, 150 p.
5. Mykhailevych, V.M. (1998), *Tenzorni modeli nakopychennia poshkodzhennia*, UNIVERSUM-Vinnytsia, Vinnytsia, 195 p.
6. Troshchenko, V. and Khamaza, L. (2014), «Rozsiane i lokalizovane vtomne poshkodzhennia metaliv i splaviv», *Visnyk TNTU*, TNTU, Ternopil, Vol. 76, No. 4, pp. 7–21, doi: 10.33108/visnyk_tntu.
7. Wang, J.Y., Zhou, Y.C. and Lin, Z.J. (2007), *Mechanical properties and atomistic deformation mechanism of γ -Y2Si2O7 from first-principles investigations*.
8. Buchen, J., Marquardt, H., Ballaran, T.B. et al. (2017), «The equation of state of wadsleyite solid solutions: constraining the effects of anisotropy and crystal chemistry», *Am Miner*, No. 102 (12), pp. 2494–2504.
9. Fan, D., Mao, Z., Yang, J. and Lin, J.F. (2015), «Determination of the full elastic tensor of single crystals using shear wave velocities by Brillouin spectroscopy», *Am Miner*, No. 100 (11–12), pp. 2590–2601.
10. Jiang, F., Speziale, S. and Duffy, T.S. (2004), «Single-crystal elasticity of grossular-and almandine-rich garnets to 11 GPa by Brillouin scattering», *J Geophys Res Sol Earth*, No. 109:B10.

Шелудченко Богдан Анатолійович – кандидат технічних наук, професор кафедри механіки та інженерії агроєкосистем Поліського національного університету.

<http://orcid.org/0000-0002-8137-0905>.

Наукові інтереси:

- фрактальна геометрія об'єктів ПТГС;
- механіка суцільного і дискретного середовищ;
- теорія систем і системний аналіз.

E-mail: sheludchenkobogdan@ukr.net.

Білецький Віктор Романович – кандидат технічних наук, доцент кафедри агроінженерії та технічного сервісу Поліського національного університету.

Наукові інтереси:

- технічна біоенергетика;
- взаємодія ходових систем з ґрунтом.

E-mail: biletскийvictor@ukr.net.

Боровський Віктор Миколайович – старший викладач кафедри агроінженерії та технічного сервісу Поліського національного університету.

Наукові інтереси:

- металообробка;
- термічна обробка.

E-mail: borovskiyvm@gmail.com.

Плужніков Олег Борисович – асистент кафедри механіки та інженерії агроєкосистем Поліського національного університету.

<https://orcid.org/0000-0002-9060-7775>.

Наукові інтереси:

- технічна механіка;
- системи автоматизованого проектування.

E-mail: torrent_17@ukr.net.

Тростенюк Юрій Валерійович – асистент кафедри механіки та інженерії агроєкосистем Поліського національного університету.

<https://orcid.org/0000-0003-2313-9040>.

Наукові інтереси:

- гідродинамічні явища;
- механіка сипучих речовин.

E-mail: yuriytro2@gmail.com.

Sheludchenko B.A., Biletsky V.R., Borovsky V.M., Pluzhnikov O.B., Trosteniuk Y.V.

Studies generalization of shape change of equipotential surfaces of stress-deformed objects

The vast majority of analytical studies of the stress-strain state of various objects of technical systems, performed at the stage of their development and design, show that the operational characteristics of these technical objects are determined by the geometric parameters of their shape change to a much greater extent than by the parameters of their stress state. The specified geometric parameters of the deformed objects are determined by the contours of the shape-changing profile of these objects and the contours of their cross-sections, which are identically described by sections of closed curves of the 4th order, which in general are the corresponding lemniscates. On the basis of the analysis of numerous analytical and experimental studies of various technical objects consisting of transversally isotropic and isotropic media, a grapho-analytical analog model of the dynamics of shape change of the contours of equipotential surfaces and plane sections of deformed technical objects in the form of a section of the Cassini oval with three characteristic inflection points is offered. The possibility of practical modeling of the shape change of the contours of the surfaces of deformed objects is considered using the examples of the dynamics of the deformation of the pneumatic shell of the periphery of the wheel drive of mobile wheeled equipment and the layer-by-layer deformation of the transverse profile of the soil by the elastic wheel drive of a mobile vehicle. The evaluation of the developed grapho-analytical model, which is analogous to the dynamics of the shape change of surface contours and flat cross-sections of technical objects, shows that the average level of confidence in such a model in comparison with the assessment of the degree of deformation according to the Genki and Swainger criteria is 86,8 %. At the same time, the minimum level of confidence probability, determined by the Henki deformation measure criterion, cannot be less than 82,3 %.

Keywords: stress-strain state; shape change dynamics; equipotential surface; model; lemniscate; Cassini oval.

Стаття надійшла до редакції 21.04.2023.