

## Постановка нестационарної задачі фільтрування рідини у деформованому пористому середовищі

Досліджено закономірності процесу фільтрування технологічних рідин через пористі матеріали. На фінішних операціях металообробки особливого значення набуває застосування мастильно-охолоджувальних рідин. У процесі експлуатації рідини безперервно і інтенсивно забруднюються твердими частками металообробки. Для відновлення початкових властивостей технологічні рідини очищають від механічних домішок. Найбільш широке застосування отримують способи очистки технологічних рідин фільтруванням. Використання фільтрування для очистки технологічних рідин найефективніше, оскільки під час фільтрування через шар пористих матеріалів можна досягти повного видалення твердих часток із рідин. Проте особливості будови пор обумовлюють низку специфічних явищ, що виникають під час руху рідин у каналах пористого середовища.

Метою дослідження є вивчення і встановлення закономірності процесу фільтрування технологічних рідин через пористі матеріали. Під час фільтрування технологічних рідин через шар пористих матеріалів пористе середовище фільтрувальної перегородки зростає зі зміною його пористості. Зміна пористості відбувається за рахунок зменшення об'єму пор пористого простору, оскільки тверді частки разом із рідиною проникають в пори каналів пористого простору і зависають в них. Проведені дослідження дозволили виявити і вивчити закономірності процесу фільтрування та встановити закон зміни пористості пористого середовища. На підставі встановлених закономірностей виведено диференціальне рівняння, яке дозволяє за заданих початкових і граничних умов сформулювати постановку задачі фільтрування рідини через шар твердих частинок деформованого пористого середовища фільтрувальної перегородки.

**Ключові слова:** технологічні рідини; тверді частки; фільтрування; пористі матеріали.

**Постановка проблеми.** У сучасному машинобудуванні під час механічної обробки деталей машин технічний прогрес передбачає вдосконалення технологій з метою підвищення якості та зниження собівартості продукції. На фінішних операціях металообробки особливого значення набуває широке застосування мастильно-охолоджувальних рідин. На підприємствах машинобудування використовуються високопродуктивні агрегати і верстати, в яких основним технологічним елементом є рідина. У процесі їх роботи технологічні рідини безперервно й інтенсивно забруднюються твердими частками металообробки.

Відомо, що тверді частки шлама, які потрапили разом з рідиною в зону контакту абразивних зерен шліфувального круга з поверхнею заготовки, деформуються самі й впливають на деформацію матеріалу оброблюваної поверхні, що призводить до утворення припалювання оброблених поверхонь [1, 2]. Для уникнення припалювання поверхонь під час шліфування, зменшення шорсткості поверхні та забезпечення мастильно-охолоджувальних рідин у відповідному робочому стані, забруднені рідини необхідно очищати від твердих часток металообробки. Зі збільшенням кількості мастильно-охолоджувальних рідин, що використовують у машинобудуванні, відповідно зростають і вимоги до технології й апаратного оснащення систем очистки. Для відновлення вихідних параметрів і властивостей технологічні рідини очищають від механічних домішок. Найбільш широке застосування отримують способи очистки технологічних рідин фільтруванням [3].

Використання фільтрування для очистки й освітлення технологічних рідин найефективніше, тому що під час фільтрування через шар пористих матеріалів можна досягти повного видалення твердих часток з рідин [4]. Проте особливості будови пористого простору обумовлюють низку специфічних явищ, що виникають під час руху рідин у каналах пористого середовища.

**Метою** роботи є вивчення і встановлення закономірності процесу фільтрування технологічних рідин через пористі матеріали. Під час фільтрування технологічних рідин через шар пористих матеріалів пористе середовище фільтрувальної перегородки змінюється зі зміною його пористості. Зміна пористості відбувається за рахунок зменшення об'єму пор пористого простору, оскільки тверді частки разом з рідиною проникають у пори каналів пористого простору і зависають у ньому.

У цій моделі процес фільтрування шламової суспензії протікає з постійним закупорюванням пор фільтрувальної перегородки. Під час фільтрування з поступовим закупорюванням пор на фільтрувальну перегородку об'ємом  $W_{\phi}$ , м<sup>3</sup>, в якій міститься шар сипкого пористого матеріалу пористістю  $P$ ,

безперервно поступає технологічна рідина з швидкістю  $W_{ж}$ , м<sup>3</sup> за хвилину, в якій містяться тверді частки масою  $\kappa_3$ , кг. Тверді частки, які потрапляють із рідиною в пори каналів фільтрувальної перегородки, зависають і затримуються у ній, а відфільтрована рідина продовжує рухатися з тією ж швидкістю. Тверді частки, що зависли в порах каналів фільтрувальної перегородки, змінюють її пористість і впливають на тривалість процесу фільтрування [5, 6].

**Викладення основного матеріалу дослідження.** Для визначення пористості фільтрувальної перегородки у будь-який момент часу і тривалості процесу фільтрування рідини через фільтрувальний шар, необхідно знати масу твердих часток, що зависли в порах сипкого пористого матеріалу фільтрувальної перегородки. Для цього за незалежне змінне візьмемо час  $t$ , а за невідому функцію  $y(t)$  – масу твердих часток, що зависли в порах каналів фільтрувальної перегородки через  $t$  хвилин після початку процесу фільтрування. Визначимо, наскільки зміниться маса твердих часток домішок у фільтрувальній перегородці за проміжок часу від  $t$  до моменту  $(t + \Delta t)$ .

За одну хвилину на фільтрувальну перегородку потрапляє  $W_{ж}$ , м<sup>3</sup> забрудненої рідини, а за  $\Delta t$  хвилин –  $W_{ж} \cdot \Delta t$ , м<sup>3</sup> і в цих  $W_{ж} \cdot \Delta t$ , м<sup>3</sup> рідини міститься  $\kappa_3 \cdot W_{ж} \cdot \Delta t$ , кг твердих часток домішок. З другого боку, за час  $\Delta t$  через фільтрувальну перегородку протікає  $W_{ж} \cdot \Delta t$ , м<sup>3</sup> відфільтрованої рідини.

У момент часу  $t$  у всій фільтрувальній перегородці об'ємом  $W_{\phi}$ , м<sup>3</sup> міститься  $y(t)$ , кг твердих часток домішок. Отже, в об'ємі  $W_{\phi} \Delta t$ , м<sup>3</sup> містилося б  $W_{\phi} \Delta t \cdot y(t)$ , кг твердих часток домішок, якби за час  $\Delta t$  кількість твердих часток у фільтрувальній перегородці не зростала. Але оскільки маса твердих часток домішок за цей час зростає на величину  $\delta$ , нескінченно малу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , то і в об'ємі  $W_{ж} \Delta t$ , м<sup>3</sup> рідини буде міститися  $W_{ж} \cdot \Delta t [y(t) + \delta]$ , кг твердих часток домішок, де  $\delta \rightarrow 0$ , при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Отже в рідині, що потрапляє на фільтрувальну перегородку за проміжок часу  $(t, t + \Delta t)$ , міститься  $\kappa_3 \cdot W_{ж} \cdot \Delta t$ , кг твердих часток домішок, а в об'ємі пористого шару фільтрувальної перегородки, яку заповнює рідина, міститься  $W_{ж} \cdot \Delta t [y(t) + \delta]$ , кг твердих часток домішок.

Приріст твердих часток домішок за час  $[y(t + \Delta t) - y(t)]$  дорівнює різниці вказаних величин, тобто

$$[y(t + \Delta t) - y(t)] = \kappa_3 W_{ж} \cdot \Delta t - W_{ж} \cdot \Delta t [y(t) + \delta].$$

Отримане рівняння розділимо на  $\Delta t$  і перейдемо до граничного значення при  $\Delta t \rightarrow 0$ . У лівій частині рівняння отримаємо похідну  $y'(t)$ , а у правій –  $\kappa_3 W_{ж} - W_{ж} y(t)$ , оскільки  $\delta \rightarrow 0$ , при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Отже, маємо диференціальне рівняння

$$y'(t) = \kappa_3 W_{ж} - W_{ж} y(t). \quad (1)$$

Диференціальне рівняння (1) належить до лінійних однорідних диференціальних рівнянь [7]. Рішення лінійних однорідних диференціальних рівнянь здійснимо методом розділення перемінних. Для рішення лінійного однорідного диференціального рівняння (1) приведемо його до вигляду

$$\frac{dy}{dt} = \kappa_3 W_{ж} - W_{ж} y.$$

Проінтегруємо обидві частини цього рівняння і після відповідних перетворень, отримаємо

$$y(t) = c \cdot e^{-W_{ж} \cdot t} + \kappa_3. \quad (2)$$

Оскільки в початковий момент фільтрування при  $t = 0$ , тверді частки домішок у фільтрувальній перегородці були відсутні, то їх маса  $y(0) = 0$ . Вважаючи в рівнянні (2)  $t = 0$ , знайдемо постійну інтегрування  $c$

$$y(0) = c \cdot e^{-W_{ж} \cdot 0} + \kappa_3.$$

Звідки  $c = -\kappa_3$ .

Підставляючи значення  $c$  в рівняння (2), отримаємо

$$y(t) = \kappa_3 (1 - e^{-W_{ж} \cdot t}).$$

При  $t = t_k$ , у пористому шарі фільтрувальної перегородки затримається

$$m_T = \kappa_3 (1 - e^{-W_{ж} \cdot t}), \quad (3)$$

де  $m_T$  – маса твердих часток, кг.

Виведена формула (3) дозволяє визначити масу твердих часток, що осіли і зависли в порах каналів сипкого пористого матеріалу фільтрувальної перегородки у будь-який момент часу процесу фільтрування мастильно-охолодної рідини з твердими частками металообробки і в подальшому вивести закон зміни пористості пористого середовища із зазначених далі.

Припускаючи, що зміна пористості пропорційна приросту маси твердих часток у пористому шарі фільтрувальної перегородки об'ємом  $W_{\phi}$ , м<sup>3</sup>, отримаємо

$$d\Pi = \frac{dm_T}{\rho \cdot W_\phi}, \quad (4)$$

де  $\rho$  – щільність пористого середовища, кг/м<sup>3</sup>.

Оскільки під час фільтрування водно-шламових суспензій через фільтрувальну перегородку пористе середовище безперервно змінюється і зростає за рахунок твердих часток шламу, то рівняння нерозривності приймає вигляд

$$\frac{\partial(\rho_0 u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_0 v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_0 w)}{\partial z} + \Pi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

Підставляючи в рівняння нерозривності значення

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dP} \cdot \frac{\partial P}{\partial t};$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{d\Pi}{dm_T} \cdot \frac{\partial m_T}{\partial t},$$

отримуємо

$$\frac{\partial(\rho_0 u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_0 v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_0 w)}{\partial z} + \Pi \frac{d\rho}{dP} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho \frac{d\Pi}{dm_T} \frac{\partial m_T}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

Реальна рідина слабо стиснена, тому з достатнім ступенем точності можна записати

$$\rho - \rho_0 = \frac{\rho}{\alpha} (P - P_0), \quad (7)$$

де  $\alpha$  – модуль пружності, Н/м<sup>2</sup>.

Визначаючи за допомогою приведених формул (3), (4), (7) значення величин

$$\frac{\partial m_T}{\partial t} = W_{жс} \cdot \kappa_3 \cdot e^{-W_{жс} \cdot t}; \quad (8)$$

$$\frac{d\Pi}{dm_T} = \frac{1}{\rho \cdot W_\phi}; \quad (9)$$

$$\frac{d\rho}{dP} = \frac{\rho}{\alpha}, \quad (10)$$

рівняння нерозривності для змінного пористого середовища має такий вигляд

$$\frac{\partial(\rho_0 u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_0 v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_0 w)}{\partial z} + \Pi \frac{\rho}{\alpha} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\kappa_3 \cdot W_{жс} \cdot e^{-W_{жс} \cdot t}}{\rho \cdot W_\phi} = 0. \quad (11)$$

Для рішення диференціального рівняння (11) під час фільтрування водно-шламової суспензії через пористий шар фільтрувальної перегородки припускаємо, що рух рідини здійснюється в одному напрямі, відповідно прийнятій моделі процесу фільтрування шламової суспензії. Тоді рівняння (11) приймає вигляд

$$\frac{\partial(\rho_0 w)}{\partial z} + \Pi \frac{\rho}{\alpha} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\kappa_3 \cdot W_{жс} \cdot e^{-W_{жс} \cdot t}}{\rho \cdot W_\phi} = 0. \quad (12)$$

Процес фільтрування водно-шламових суспензій через пористий шар твердих часток фільтрувальної перегородки підкоряється лінійному закону фільтрування – закону Дарсі [8, 9]

$$w = k_\phi \cdot \frac{dP}{dz}, \quad (13)$$

де  $k_\phi$  – коефіцієнт фільтрування, м/с.

Коефіцієнт фільтрування має розмірність швидкості та характеризує властивості фільтрувального матеріалу для конкретного виду рідини. Слід зауважити, що значення коефіцієнта фільтрування бажано визначати експериментальним шляхом, оскільки запропоновані теоретичні формули не завжди дають достатньо точні результати [10].

Виконуючи відповідні перетворення рівняння фільтрування для перемінного пористого середовища через перепади тиску на фільтрувальну перегородку, отримуємо кінцевий вигляд цього рівняння фільтрування рідини в перемінному пористому середовищі

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \Pi \frac{\rho \cdot g}{\alpha \cdot k_\phi} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\kappa_3 \cdot g \cdot W_{жс} \cdot e^{-W_{жс} \cdot t}}{k_\phi \cdot \rho \cdot W_\phi} = 0. \quad (14)$$

Таким чином, на підставі закону зміни пористості фільтрувальної перегородки виведено диференціальне рівняння фільтрування рідини в перемінному пористому середовищі. Диференціальне

рівняння (14) дозволяє за заданих початкових і граничних умов отримати рішення задачі фільтрування рідини через шар твердих часток перемінного пористого середовища фільтрувальної перегородки в області часових  $0 \leq t \leq T$  та просторових  $0 \leq z \leq L$  значень.

$$P(z, 0) = P_1; \quad P(0, t) = P_1; \quad P(L, t) = P_2. \quad (15)$$

На поверхні фільтрувальної перегородки розподіл тиску задається як функція координат і часу  $P(z, t)$ .

Розподіл тиску на поверхні фільтрувальної перегородки в початковий момент часу фільтрування при  $t = 0$  визначається як  $P(z, 0) = P_1$ .

Оскільки тиск на поверхні фільтрувальної перегородки під час фільтрування підтримують постійним, то і сила гідростатичного тиску, яка діє перпендикулярно на поверхню фільтрувальної перегородки, є величиною постійною.

Введемо в диференціальне рівняння (14) силу, яка діє перпендикулярно на фільтрувальну перегородку. В результаті отримаємо диференціальне рівняння деформації пористого середовища фільтрувальної перегородки

$$\frac{\partial^2 F_n}{\partial z^2} + \Pi \frac{\rho \cdot g}{\alpha \cdot k_\phi} \frac{\partial F_n}{\partial t} + \frac{\kappa_3 \cdot g \cdot S \cdot W_{жс} \cdot e^{-W_{жс} \cdot t}}{k_\phi \cdot \rho \cdot W_\phi} = 0. \quad (16)$$

Задаючись початковими та граничними умовами, приходимо до постановки граничної задачі фільтрування водно-шламових рідин у змінному пористому середовищі.

Розв'язання нестационарної задачі (14) з початковими і граничними умовами (15) здійснюємо методом кінцевих різниць [11]. Суть методу полягає в тому, що рішенням задачі є знаходження набору чисел у відповідних точках дискретної множини, де як дискретну множину точок використовують сукупність точок перетину прямих ліній.

#### Висновки:

1. Проведені дослідження дозволили виявити і вивчити закономірності процесу фільтрування технологічних рідин через сипучі пористі матеріали;

2. Виявлені закономірності дали змогу встановити закон зміни пористості фільтрувальної перегородки;

3. На підставі закону зміни пористості фільтрувальної перегородки виведено диференціальне рівняння, яке дозволяє за заданих початкових і граничних умов отримати рішення нестационарної задачі фільтрування рідини через шар твердих часток змінного пористого середовища фільтрувальної перегородки;

4. Введення в диференціальне рівняння (14) сили, яка діє перпендикулярно на фільтрувальну перегородку, дає змогу отримати диференціальне рівняння деформації пористого середовища.

#### Список використаної літератури:

1. Молчанов В.Ф. Теоретические исследования вероятности заклинивания твердых частиц при шлифовании / В.Ф. Молчанов // Вісник Житомирського державного технологічного університету. Серія : Технічні науки. – 2017. – № 2 (80). – Т. 2. – С. 114–119.
2. Худобин Л.В. Влияние загрязнения СОЖ отходами шлифования на пригогообразование / Л.В. Худобин, Е.П. Гульнов // Вестник машиностроения. – 1978. – № 1. – С. 67–68.
3. Полянсков Ю.В. К методике исследования эффективной очистки СОЖ от механических примесей при абразивной обработке / Ю.В. Полянсков, Е.А. Карев // Труды института. Ульяновский политехнический институт. – Куйбышев, 1976. – Вып. 1. – С. 46–54.
4. Молчанов В.Ф. Исследование фильтрации жидкостей через пористые материалы / В.Ф. Молчанов // Математичні проблеми технічної механіки : мат-ли Третьої Всеукр-кої наукової конф. – Дніпродзержинськ, 2003. – С. 71–72.
5. Молчанов В.Ф. Постановка и решение нестационарной задачи фильтрации жидкостей в пористой среде / В.Ф. Молчанов // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета и Северо-Восточного научного центра Транспортной академии Украины : сборник научных трудов. – Х., 2006. – Вып. 33. – С. 112–115.
6. Молчанов В.Ф. Постановка нестационарной задачи фильтрации жидкостей в пористой среде / В.Ф. Молчанов // Математичне моделювання : науковий журнал. – Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2014. – № 1. – С. 28–30.
7. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. – М. : Наука, 1977. – 664 с.
8. Шейдеггер А. Физика течения жидкостей через пористые среды / А.Шейдеггер. – М., 1960. – 137 с.
9. Молчанов В.Ф. Дослідження пропускної спроможності фільтрувальних сіток / В.Ф. Молчанов // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету. Серія : Технічні науки. – Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2012. – Вып. 3 (20). – С. 61–65.
10. Жужиков В.А. Фильтрация. Теория и практика разделения суспензий / В.А. Жужиков. – М. : Химия, 1968. – 411 с.
11. Молчанов В.Ф. Постановка и решение нестационарной граничной задачи фильтрации жидкостей в пористой среде / В.Ф. Молчанов // Збірник наукових праць Дніпровського державного технічного університету. Серія : Технічні науки. – Кам'янське : ДДТУ, 2018. – Вып. 1 (32). – С. 53–58.

**References:**

1. Molchanov, V.F. (2017), «Teoretycheskie issledovaniya veroyatnosti zaklinivaniya tverdyh chastic pri shlifovanii», *Visnyk Zhytomyr'skogo derzhavnogo tehnologichnogo universytetu*, Seriya *Tekhnichni nauky*, No. 2 (80), Vol. 2, pp. 114–119.
2. Hudobyn, L.V. and Gul'nov, E.P. (1978), «Vlijanye zagrjaznenija SOZh othodamy shlifovanija na prizhogoobrazovanie», *Vestnyk mashynostroenija*, No. 1, pp. 67–68.
3. Poljanskov, Ju.V. and Karev, E.A. (1976), «K metodike issledovanija jeffektivnoj ochistki SOZh ot mehanicheskikh primesej pri abrazivnoj obrabotke», *Trudy instituta, Ul'janovskij politehnicheskij institut*, Kujbyshev, Issue 1, pp. 46–54.
4. Molchanov, V.F. (2003), «Issledovanye fyl'tracii zhydkostej cherez poristye materialy», *Matematychni problemy tehnicnoi' mehaniky*, mat-ly Tret'oi' Vseukr-koi' naukovoï' konf., Dniprodzerzhyn'sk, pp. 71–72.
5. Molchanov, V.F. (2006), «Postanovka i reshenie nestacionarnoj zadachi fil'tracii zhydkostej v poristoj srede», *Vestnik Har'kovskogo nacional'nogo avtomobil'no-dorozhnogo universiteta i Severo-Vostochnogo nauchnogo centra Transportnoj akademii Ukrainy, sbornik nauchnyh trudov*, H., Issue 3, pp. 112–115.
6. Molchanov, V.F. (2014), «Postanovka nestacionarnoj zadachi fil'tracii zhydkostej v poristoj srede», *Matematychni modeljuvannja*, naukovyj zhurnal, DDTU, Dniprodzerzhyn'sk, No. 1, pp. 28–30.
7. Pontrjagyn, L.S. (1977), *Obyknovennye differencial'nye uravnenija*, Nauka, M., 664 p.
8. Shejdegger, A. (1960), *Fizika techenija zhydkostej cherez poristye sredy*, M., 137 p.
9. Molchanov, V.F. (2012), «Doslidzhennja propusknoi' spromozhnosti fil'truval'nyh sitok», *Zbirnyk naukovyh prac' Dniprodzerzhyn'skogo derzhavnogo tehnichnogo universytetu*, serija *Tekhnichni nauky*, DDTU, Dniprodzerzhyn'sk, Issue 3 (20), pp. 61–65.
10. Zhuzhykov, V.A. (1968), *Fil'trovanie. Teorija i praktika razdelenija suspenzij*, Himija, M., 411 p.
11. Molchanov, V.F. (2018), «Postanovka i reshenie nestacionarnoj granichnoj zadachi fil'tracii zhydkostej v poristoj srede», *Zbirnyk naukovyh prac' Dniprovs'kogo derzhavnogo tehnichnogo universytetu*, Serija *Tekhnichni nauky*, DDTU, Kam'jans'ke, Issue 1 (32), pp. 53–58.

**Молчанов Віталій Федорович** – доцент, кандидат технічних наук, доцент Дніпровського державного технічного університету.

Наукові інтереси:

- дослідження впливу технологічних рідин на процеси обробки інструментальних матеріалів шліфуванням та впровадження ресурсозберігаючих технологій для забезпечення екологічної чистоти процесів очистки технологічних середовищ у системах експлуатації мастильно-охолоджуючих рідин металорізальних верстатів для навколишнього середовища.

E-mail: v\_molchanov@ukr.net.

Стаття надійшла до редакції 25.02.2020.